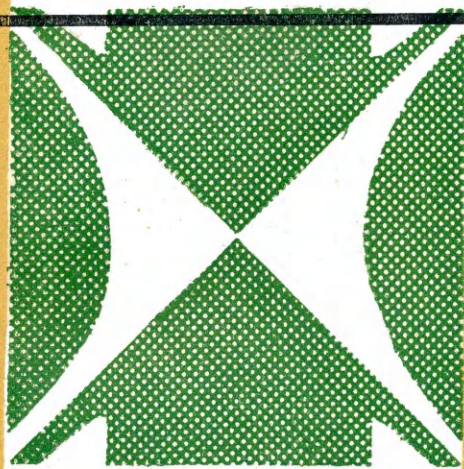


**ОПТИМИЗАЦИЯ
И ИССЛЕДОВАНИЕ
О П Е Р А Ц И Й**



А. И. ПРОПОЙ

**Элементы теории
оптимальных
дискретных
процессов**





ОПТИМИЗАЦИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Редактор серии

Н. Н. МОИСЕЕВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1973

А. И. ПРОПОЙ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973

517.8

П 81

УДК 519.95

Элементы теории оптимальных дискретных процессов. А. И. Пропой.
Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1973, стр. 256.

Задачи оптимального управления дискретными системами возникают при текущем и перспективном планировании экономики, оптимизации сложных технологических систем, в различных вопросах организации производства и исследования операций, при управлении непрерывными процессами с помощью цифровых вычислительных машин. До последнего времени к таким задачам был известен только один подход, связанный с динамическим программированием Р. Беллмана.

В настоящей книге развивается другой подход, связанный с аппаратом принципа максимума Л. С. Понтрягина и нелинейным программированием. Рассмотрены условия оптимальности, соотношения двойственности и вычислительные методы. Исследуется связь между условиями оптимальности для дискретных и непрерывных систем.

Библ.— 224. Илл.— 21.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Глава I. Постановка задачи	11
§ 1. Примеры задач дискретного управления	11
§ 2. Общая постановка задачи	16
§ 3. Типы задачи	21
§ 4. Множества достижимости	27
§ 5. Линейные системы	29
§ 6. Существование оптимального управления	31
Глава II. Одношаговая задача оптимизации	34
§ 1. Некоторые сведения из n -мерной геометрии и теории выпуклых множеств	34
§ 2. Постановка задачи	38
§ 3. Конусы допустимых вариаций	40
§ 4. Условия оптимальности. I	44
§ 5. Принцип максимума	46
§ 6. Условия одноэкстремальности	48
§ 7. Двойственность	48
§ 8. Функция Лагранжа	50
§ 9. Седловая точка и оптимальность	56
§ 10. Условия оптимальности. II. Теорема Куна—Таккера	57
§ 11. Вычислительные методы. Классификация	59
§ 12. Оценка приближения	60
§ 13. Методы возможных направлений	63
§ 14. Ограничения в виде равенств	67
§ 15. Двойственные методы	68
§ 16. Методы одновременного решения прямой и двойственной задач	73
Глава III. Условия оптимальности	76
§ 1. Сопряженная система	76
§ 2. Задача оптимизации конечного состояния	79
§ 3. Доказательство теоремы 2.1	82
§ 4. Вырожденный случай	89
§ 5. Задача с суммарным показателем качества	91
§ 6. Задача с ограничениями на переменные состояния	92
Глава IV. Принцип максимума	99
§ 1. Функция Гамильтона на оптимальном управлении	99
§ 2. Задача оптимизации конечного состояния	102
§ 3. Задача с суммарным показателем качества	104
§ 4. Принцип квазимаксимиума	106
§ 5. Условия одноэкстремальности	112
§ 6. Линейные системы	115

Глава V. Двойственность в управлении	119
§ 1. Двойственные задачи управления	119
§ 2. Соотношения двойственности	123
§ 3. Седловая точка и оптимальность	130
§ 4. Задача с суммарным показателем качества	132
§ 5. Достаточные условия оптимальности	134
§ 6. Двойственная задача управления	135
§ 7. Учет ограничений	138
§ 8. Условия оптимальности для задачи с ограничениями на переменные состояния	142
§ 9. Принцип максимума для задачи с ограничениями на переменные состояния	148
§ 10. Теорема Куна — Таккера для задач управления	149
§ 11. Задачи линейного динамического программирования	152
§ 12. Задачи квадратичного динамического программирования	160
Глава VI. Вычислительные методы	164
§ 1. Оценка приближения	165
§ 2. Методы возможных направлений	168
§ 3. Случай отсутствия ограничений на переменные состояния	171
§ 4. Линейная система	181
§ 5. Ограничения на переменные состояния. I	184
§ 6. Линейная система	190
§ 7. Ограничения в виде равенств	193
§ 8. Метод штрафных функций	198
§ 9. Двойственные методы	201
§ 10. Линейная система	204
§ 11. Приближение по граничным условиям	205
§ 12. Ограничения на переменные состояния. II	209
§ 13. Приближение в пространстве управлений	211
§ 14. Обсуждение методов	214
§ 15. Системы с запаздыванием	216
§ 16. Особенности оптимизации дискретных систем	222
Комментарии	231
Литература	241
Предметный указатель	254

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дискретные процессы управления приобретают все большее значение в теории и практике оптимального управления. Это связано с тем, что многие задачи экономического планирования, технологии и организации производства, исследования операций, военного дела описываются разностными уравнениями, так как на практике чаще всего и информация о состоянии процесса, и управление процессом осуществляются в дискретные моменты времени, т. е. по шагам.

Для решения таких многошаговых задач возможны два подхода.

Первый основан на принципе оптимальности Р. Беллмана и приводит к необходимости решать функциональные уравнения специального вида. Достоинства и возможности динамического программирования, развитого на основе этого подхода, хорошо известны, и он достаточно полно отражен в литературе.

Второй — вариационный — подход основан на распространении идей и методов математического программирования на многошаговые задачи и смыкается с аппаратом принципа максимума Л. С. Понтрягина, развитого для решения задач оптимального непрерывного управления. Этот подход иногда называют «дискретный принцип максимума» (где слово «дискретный» относится, конечно, не к принципу).

Математическое программирование связано с задачами эффективного использования и распределения ограниченных ресурсов, которые сводятся к нахождению экстремумов функций многих переменных при ограничениях

в виде равенств и неравенств. В математическом программировании созданы эффективные вычислительные методы, позволяющие решать экстремальные задачи с большим числом переменных и ограничений на них. В особенности это относится к задачам линейного программирования, которое нашло широкое применение и оказало сильное воздействие на другие разделы теории математического программирования.

Как для самой теории математического программирования, так и для основного круга ее приложений характерен одноразовый, одношаговый выбор оптимального решения (распределение программы выпуска нужной продукции между несколькими производственными участками, определение наилучшего плана перевозок, выбор оптимального варианта технологии, расчет различного рода сетей, планирование размещения промышленных предприятий, распределение средств поражения по целям и т. п.). Такие задачи являются статистическими задачами оптимизации.

Однако как только возникает вопрос о развитии системы (и не только во времени, но и в пространстве), об управлении системой, одношаговое решение становится непригодным. В этом случае решение должно быть принято на определенное число шагов вперед, и задача оптимизации становится многошаговой, динамической. К задачам такого рода относятся задачи перспективного и оперативного планирования, составления программ развития различных систем, задачи планирования боевых операций, расчет многоступенчатых технологических комплексов и т. п. Примеры некоторых таких задач приведены в главе I этой книги.

С изменением характера задачи меняется и ее проблематика. Если для одношаговой задачи основное значение имело нахождение оптимального решения, то для многошаговой задачи наряду с определением самой про-

граммы оптимального развития системы не меньшее значение имеет и ее практическая реализация, т. е. собственно задача управления.

Таким образом, теория многошаговых задач оптимизации должна базироваться как на теории математического программирования, так и на теории оптимального управления.

Конечно, любая многошаговая задача может рассматриваться и как статистическая, а для ее решения возможно привлечение методов математического программирования. Однако непосредственное применение этих методов для решения многошаговых задач обычно не приводит к цели: получающиеся при этом задачи линейного или нелинейного программирования часто имеют настолько большой размер, что их невозможно решить даже с помощью современной вычислительной техники. Поэтому здесь нужна разработка специальных методов, учитывающих динамический характер этих задач.

Второму подходу и посвящена настоящая книга. Она состоит из шести глав. Содержание их ясно из оглавления. Подробное и детальное изложение всех методов теории управления дискретными процессами не входило в задачи и возможности этой книги, ее цель состояла в рассмотрении лишь основных идей и методов.

Книга предназначена для всех тех, кому приходится сталкиваться с методами оптимизации, как в теоретическом, так и в прикладном плане. Для ее чтения достаточно знания математики в объеме втуза. Специальных знаний по математическому программированию и теории оптимального управления не требуется (они сообщаются по ходу изложения), хотя некоторая предварительная ориентация в этих вопросах была бы полезна.

В самом тексте ссылки на литературу даны самые необходимые, в конце книги приведена сравнительно подробная библиография по теории дискретного управления

и смежным вопросам, а также комментарии к ней и основному тексту книги.

В книге принята отдельная нумерация формул, теорем, рисунков для каждого параграфа. При ссылках внутри главы указывается номер параграфа и номер формулы, теоремы, рисунка и т. п., при ссылках на результаты других глав к этим числам добавляется слева номер соответствующей главы.

Эта книга написана на основе моей диссертации по применению методов математического программирования в дискретном управлении. Пользуюсь случаем, чтобы выразить благодарность профессору Я. З. Цыпкину за постоянное внимание и поддержку этой работы.

Считаю своим приятным долгом выразить признательность члену-корреспонденту АН СССР Н. Н. Моисееву за приглашение прочесть лекции по теории дискретного управления во Второй Всесоюзной школе по методам оптимизации (г. Шемаха, 6—26 июня 1967 г.) и инициативу написания этой книги.

Наконец, я приношу сердечную признательность В. М. Тихомирову и А. Д. Иоффе за критические замечания и дружеское участие, способствовавшие усовершенствованию книги.

А. Пропой

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

§ 1. Примеры задач дискретного управления

Прежде чем поставить задачу в общем виде, рассмотрим несколько простых примеров, с тем, чтобы, не вдаваясь в детали, можно было бы представить специфику некоторых типичных задач оптимального дискретного управления.

1. Задача перспективного планирования. Рассмотрим производство, в котором участвуют n ингредиентов (различные виды производственных факторов, сырья, промежуточных и конечных продуктов). Имеется m технологических способов организации этого производства. Каждый из этих способов в момент времени k ($k=0, \dots, N-1$) (k , например, месяц, квартал, год) характеризуется вектором $\{b_{1j}(k), \dots, b_{nj}(k)\}$. Причем, если $b_{ij}(k) < 0$, то величина $b_{ij}(k)$ определяет затраты i -го ингредиента при j -м способе производства в период k ; если $b_{ij}(k) > 0$, то $b_{ij}(k)$ определяет выпуск i -го ингредиента при j -м способе. Обозначим через $u_j(k)$ интенсивность использования j -го технологического способа в период k , через $s_i(k)$ ($i=1, \dots, n$) — величину спроса на продукцию, выпускаемую в этом периоде.

Будем предполагать, что мощности производства таковы, что они могут удовлетворить возникающий спрос, т. е. всегда

$$\sum_{j=1}^m b_{ij}(k) u_j(k) - s_i(k) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Обозначим через $x_i(k+1)$ количество продукции, образовавшееся на складе к концу периода $k+1$ (запасы в период $k+1$). Эта величина складывается из запасов предыдущего периода $x_i(k)$ и образовавшихся излишков в этот период:

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(k) u_j(k) - s_i(k) \quad (i = 1, \dots, n)$$

или в векторной форме

$$x(k+1) = x(k) + B(k)u(k) - s(k) \quad (k = 0, \dots, N-1). \quad (1.1)$$

Матрица $B(k)$ обычно называется «технологической матрицей».

Вообще говоря, если в начале периода $k+1$ на складе имелись запасы в количестве $x(k)$, то к концу этого периода для продажи будет годна только часть, равная $A(k)x(k)$, где $A(k) = [a_{ii}(k)]$ ($i=1, \dots, n$) — диагональная матрица, характеризующая «старение» продукции за период. В этом случае уравнение, описывающее процесс, будет

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) - s(k) \quad (1.2) \\ (k = 0, \dots, N-1).$$

Обозначим через $g(u(k), k)$ издержки от использования технологических способов с интенсивностями $u(k)$, через $f(x(k), k)$ — затраты за хранение готовой продукции на складе в количестве $x(k)$. Тогда общие издержки производства за период планирования определяются суммой

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} [f(x(k), k) + g(u(k), k)]. \quad (1.3)$$

Часто эти затраты можно представить в виде линейных функций

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} [(a(k), x(k)) + (b(k), u(k))]. \quad (1.4)$$

Таким образом, требуется найти такой план (последовательность интенсивностей $\{u(0), \dots, u(N-1)\}$), при котором общие затраты (1.3) (или (1.4)), определяемые из уравнений (1.2) (или (1.1)), минимальны. При этом начальные запасы $x(0)$ считаются заданными, в последующие периоды должно быть $x(k) \geq 0$ ($k=1, \dots, N$), а значения векторов интенсивностей лежат в некоторой допустимой области: $u(k) \in U_k$ (определяющей, например, ограничения на мощности производства).

Заметим, что $A(k)$, $B(k)$, $s(k)$, U_k , $a(k)$ и $b(k)$ должны быть известны заранее (например, строиться, исходя из технических и экономических прогнозов).

2. Задача оптимального управления запасами. Говоря инженерным языком, задача состоит в создании системы, оптимально следящей за спросом или за заранее определенным для этой системы планом производства.

Рассмотрим, например, работу какого-то производственного объединения или фирмы. Пусть $x_k(k) = \{x_1(k), \dots, x_n(k)\}$ — вектор количества n видов товаров выпускаемых этой фирмой, имеющихсся в наличии на складе к концу k -го периода, $B(k)$ — технологическая матрица $u(k) = \{u_1(k), \dots, u_r(k)\}$ — вектор интенсивностей (скорость производства), $s(k) = \{s_1(k), \dots, s_n(k)\}$ — вектор количества товаров, поставленных со склада в k -й период. Тогда так же, как и в примере 1 § 1, уравнение, описывающее процесс, будет иметь вид

$$x(k+1) = x(k) + B(k)u(k) - s(k).$$

Обозначим через $x^*(k)$ вектор количества товаров, который желательно иметь к концу k -го периода; например, $x^*(k)$ может определяться спросом на эти товары, либо просто быть планом производства. Ясно, что работа системы будет тем лучше, чем ближе вектор $x(k)$ к вектору $x^*(k)$ в каждый период. С другой стороны, слишком точное слежение за «спросом» $x^*(k)$ нежелательно, так как оно вызвало бы чрезмерно резкие и частые, а потому дорогие перестройки производственного процесса. Поэтому естественно определить качество работы системы за плановый период N , например, величиной

$$J = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \alpha_i(k) [x_i(k) - x_i^*(k)]^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \varphi(u(k), k).$$

Здесь $\alpha_i(k) > 0$, функция $\varphi(u(k), k)$ определяет затраты на производство в k -й период. Кроме того, необходимо учитывать ограничения на переменные $x(k)$ и $u(k)$, например, вида

$$x_i(k) \geq 0, 0 \leq u_j(k) \leq \rho_j(k) \quad (i=1, \dots, n; j=1, \dots, r).$$

3. Оптимальный расчет химических реакторов. Выше были рассмотрены задачи управления, в которых дискретность возникает из-за того, что либо получение информации об объекте, либо подача управляющих воздействий на объект происходит в дискретные моменты времени. Суще-

ствуется еще большая группа задач, одна из которых будет здесь рассмотрена, где дискретность возникает из-за многоступенчатости процесса в пространстве. К таким задачам относятся, например, задача об оптимальном конструировании многоступенчатой ракеты, задачи расчета химических реакторов и т. п.

Приведем простейшую задачу такого рода. Рассмотрим N химических реакторов с одним видом продукта, соединенных между собой последовательно. Пусть $x(k)$ — концентрация продукта на входе k -го реактора, $x(k+1)$ — концентрация на его выходе. Эти концентрации связаны между собой известной зависимостью (она может быть определена либо из теоретических соображений, либо путем моделирования данной реакции на вычислительной машине)

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \quad (k=0, \dots, N-1), \quad (1.5)$$

где $u(k) = \{u_1(k), \dots, u_r(k)\}$ — вектор технологических и расчетных параметров k -го реактора (например, температура, объем), определяющих его характеристики.

Одна из задач, связанная с расчетом такой цепочки реакторов, состоит в том, чтобы выбрать такие значения параметров $u(k)$ каждого реактора, при которых выход конечного продукта $x(N)$ был бы максимальным. При этом начальная концентрация $x(0)$ считается заданной.

Другая задача состоит в том, чтобы при заданной конечной концентрации $x(N)$ затраты на постройку такой последовательности реакторов были бы минимальными. Предполагается, что эти затраты являются известной функцией параметров каждого реактора, т. е. в этом случае нужно минимизировать сумму

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} \varphi(u(k), k).$$

4. Транспортная задача. Часто не только динамические, но и статистические по самой природе задачи удобно представлять в виде многошагового процесса. Для примера рассмотрим нелинейную транспортную задачу.

Имеется m пунктов производства некоторого продукта. Объем производства i -го пункта равен a_i . Весь произведенный продукт потребляется в n пунктах спроса. Объем потребления j -го пункта равен b_j .

Пусть u_{ij} — количество единиц продукта, поставленного i -м производителем j -му потребителю.

Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^n u_{ij} = a_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad (1.6)$$

$$\sum_{i=1}^m u_{ij} = b_j \quad (j = 1, \dots, n). \quad (1.7)$$

Кроме того,

$$u_{ij} \geq 0, \quad (1.8)$$

т. е. считаем, что продукт перевозится только из пунктов производства в пункты потребления. Система предполагается замкнутой, т. е. считается, что весь произведенный продукт потребляется:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Пусть $\varphi_{ij}(u_{ij})$ — расходы на перевозку продукта в количестве u_{ij} от i -го производителя к j -му потребителю. Общие расходы выразятся суммой

$$J = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}(u_{ij}). \quad (1.9)$$

Требуется составить такой план перевозок u_{ij} ($i=1, \dots, m$; $j=1, \dots, n$), удовлетворяющий ограничениям (1.6) — (1.8), при которых общие расходы (1.9) были бы минимальны.

Чтобы привести эту сугубо статическую задачу планирования к «динамической», будем предполагать, что составление плана перевозок потребителям осуществляется по шагам, начиная с первого и кончая n -м (например, устанавливается приоритет снабжения потребителей). Введем величину

$$x_{ik} = \sum_{j=1}^k u_{ij} \quad (k = 1, \dots, n),$$

обозначающую суммарное количество единиц продукта, перевезенных от i -го производителя к первым k потребителям. Очевидно,

$$x_{ik} = x_{i,k-1} + u_{ik} \quad (k = 1, \dots, n), \quad (1.10)$$

где $x_{i0} = 0$ и $x_{in} = \sum_{j=1}^n u_{ij} = a_i$.

Таким образом, приходим к следующей эквивалентной формулировке задачи: найти последовательность неотрицательных величин $\{u_{i1}, \dots, u_{in}\}$ ($i=1, \dots, m$) (управление u), которые обеспечивают показателю качества (1.9) минимальное значение в силу уравнений «движения» (1.10) с начальным $x_{i0} = 0$ и конечным $x_{in} = a_i$ ($i=1, \dots, m$) условиями. Кроме того, переменные u_{ij} должны удовлетворять условию (1.7).

Отметим, что такое представление статической задачи в виде многошаговой часто позволяет предложить простой и удобный способ ее решения.

§ 2. Общая постановка задачи

В предыдущем параграфе было рассмотрено несколько характерных примеров задач дискретного управления. Из этих примеров видно, что дискретное управление может рассматриваться как некоторый многошаговый процесс. На каждом шаге k этот процесс характеризуется двумя наборами переменных $x(k) = \{x_1(k), \dots, x_n(k)\}$ и $u(k) = \{u_1(k), \dots, u_r(k)\}$. Векторы $x(k)$ определяют состояние процесса на k -м шаге и называются *переменными состояниями* либо *фазовыми переменными*. Например, состоянием процесса могут быть координаты положения и скорости ракеты, или мощности различных технологических способов производства какого-либо продукта, или концентрации веществ, участвующих в химической реакции, и т. п. Знание вектора $x(k)$ полностью определяет процесс на k -м шаге.

Вектор $x(k)$ является элементом n -мерного вещественного евклидова пространства E^n , которое будем называть *пространством состояний* и обозначать через X . Часто необходимо учитывать ограничения на вектор состояний. Например, мощность производства или концентрации вещества не может быть отрицательной, скорость ракеты огра-

ничена и т. д. Таким образом, в общем случае значение вектора $x(k)$ должно принадлежать некоторому подмножеству X_k пространства состояний E^n :

$$x(k) \in X_k \subset E^n \quad (k=0, 1, \dots, N). \quad (2.1)$$

Обычно множества X_k задаются набором неравенств

$$h_j(x(k), k) \geq 0 \quad (j=1, \dots, s_k; k=0, 1, \dots, N). \quad (2.1a)$$

Вектор $u(k)$ определяет *управляющие воздействия* на k -м шаге; управляющие воздействия — это, например, изменение температуры реакции, скорости производства, тяги ракеты и т. п. Вектор $u(k)$ может принимать значения из некоторого заданного подмножества U_k евклидова пространства E^r (пространства управляющих воздействий):

$$u(k) \in U_k \subset E^r \quad (k=0, 1, \dots, N-1); \quad (2.2)$$

в частности,

$$g_i(u(k), k) \leq 0, \quad (i=1, \dots, m_k; k=0, 1, \dots, N-1). \quad (2.2a)$$

Например, температура не может быть отрицательной (по абсолютной шкале) и не должна превышать определенной величины (иначе оборудование быстро выйдет из строя); скорость производства, тяга ракеты ограничены.

Для ряда задач ограничения задаются совместно на переменные управления и состояния

$$g_i(x(k), u(k), k) \geq 0 \quad (i=1, \dots, m_k; k=0, 1, \dots, N-1).$$

Например, интенсивность производства ограничена имеющимися мощностями и т. п.

Значения векторов $x(k)$ и $u(k)$ на k -м шаге определяют состояние процесса на $k+1$ -м шаге:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \quad (k=0, 1, \dots, N-1); \quad (2.3)$$

где $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ — некоторая заданная вектор-функция, определяющая динамику процесса.

Назовем последовательность векторов $\{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\}$ *управлением* процесса; соответствующую этому управлению в силу уравнений движения (2.3) для некоторого начального состояния $x(0)$ последовательность $\{x(0), x(1), \dots, x(N)\}$ будем называть *траекторией* процесса и обозначать соответственно через u и x . Оче-

видно выбор управления u для данного начального состояния $x(0)$ полностью определяет из (2.3) соответствующую траекторию x , т. е. $x = x(x(0), u)$.

Фиксируем некоторое начальное состояние $x(0)$ и возьмем управление u , удовлетворяющее ограничениям (2.1). Если при этом состояния $x(k)$ ($k=1, \dots, N$) соответствующей траектории x будут удовлетворять ограничениям (2.2), то такое управление u будем называть *допустимым* для данного начального состояния $x(0)$.

Следует отметить, что задачи с ограничениями (2.1) оказались значительно труднее, чем с ограничениями только на управляющие воздействия (т. е. когда векторам $x(k)$ разрешается принимать любые значения из пространства состояний).

Поэтому задачи, в которых учитываются еще и ограничения типа (2.1) или (2.1a), обычно выделяются в специальный класс, который получил название задач с ограничениями на состояния (с фазовыми ограничениями).

Для произвольного управления u и соответствующей траектории определим функционал следующего вида:

$$J = \Phi(x(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x(k), u(k), k), \quad (2.4)$$

где Φ и f_0 — заданные скалярные функции, которыми будем оценивать качество процесса управления. Очевидно, $J = J(x(0), u)$. Таким образом, для некоторого начального состояния $x(0)$ управление будет тем лучше, чем, например, больше значение функционала J . Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти наилучшее (оптимальное) управление u , т. е. такое, которое доставляет функционалу J наибольшее (в данном случае) значение при ограничениях (2.1), (2.2) и (2.3).

Например, требуется в конце периода управления достичь максимального производства товаров заданного ассортимента, или максимального выхода продукта в химической реакции, или попасть ракетой в заданную область при минимальном расходе топлива и т. п.

Поскольку всегда $\min J = -\max(-J)$, то любую задачу оптимизации можно свести к задаче нахождения максимального значения, и в дальнейшем для опреде-

ленности всегда будет предполагаться, что требуется найти максимальное значение функционала J .

Сформулируем теперь задачу окончательно.

Задача. Заданы уравнения, описывающие процесс

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \quad (k=0, 1, \dots, N-1)$$

и ограничения на переменные

$$g_i(x(k), u(k), k) \geq 0 \quad (i=1, \dots, m_k; k=0, 1, \dots, N-1).$$

Задан функционал

$$J = \Phi(x(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x(k), u(k), k),$$

характеризующий качество управления и длительность (число шагов) N управления. Требуется для заданного начального состояния $x(0) = a$ найти такие допустимые управление и соответствующую ему траекторию, которые доставляют показателю качества (2.4) наибольшее значение.

Это — типичная задача оптимального дискретного управления. Представляют интерес как различные частные случаи этой задачи, так и ее обобщения, которые будут рассмотрены в следующем параграфе.

Отметим, что зависимость уравнений движения и ограничений от номера шага k ничего принципиально нового, как будет видно из дальнейшего, не дает. Поэтому далее эту зависимость будем часто опускать.

Здесь же для сравнения рассмотрим непрерывный аналог сформулированной выше задачи дискретного управления. Именно, рассмотрим следующую задачу управления непрерывным процессом.

Задача. Требуется найти вектор-функцию $u(t)$, определенную на заданном интервале $0 \leq t \leq T$ (управление u) и соответствующую этому управлению в силу заданного дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t) \quad (2.5)$$

и начального состояния

$$x(0) = a, \quad (2.6)$$

вектор-функцию $x(t)$ ($0 \leq t \leq T$) (траекторию x), удовлет-

воряющие ограничениям

$$g_i(x(t), u(t), t) \geq 0 \quad (i=1, \dots, m_i; \quad 0 \leq t \leq T) \quad (2.7)$$

и доставляющие показателю качества

$$J = \Phi(x(T)) + \int_0^T f_0(x(t), u(t), t) dt \quad (2.8)$$

наибольшее значение.

Обычно в таких задачах предполагается, что функция $u(t)$ — кусочно-непрерывна, а функции f_j , g_i , Φ — непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка.

При решении непрерывных задач на цифровой вычислительной машине или при управлении непрерывным процессом дискретным управляющим устройством вместо непрерывной задачи необходимо рассмотреть ее разностную аппроксимацию.

Возможны различные, в смысле точности или простоты, переходы к дискретной аппроксимации задачи (2.5) — (2.8). Приведем здесь простейшую. Разобьем интервал $[0, T]$ на N равных шагов: $t_0, t_1, \dots, t_N$; $t_0=0$, $t_N=T$; $t_{k+1}-t_k/N=\Delta$ ($k=0, 1, \dots, N-1$). Управление u будем считать на каждом шаге постоянным

$$u(t) = u(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1} \quad (k=0, 1, \dots, N-1).$$

В этом случае дифференциальное уравнение (2.5) заменится на разностное вида

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \Delta f(x(t_k), u(t_k), t_k) + o(\Delta),$$

где $|o(\Delta)|/\Delta \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$ (через $|o(\Delta)|$ обозначена норма вектора $o(\Delta)$). Отбрасывая бесконечно малые величины выше первого порядка и учитывая, что $t_k = k\Delta$, получим

$$x[(k+1)\Delta] = x(k\Delta) + \Delta f[x(k\Delta), u(k\Delta), k\Delta]. \quad (2.9)$$

Аналогичным образом ограничения (2.7) заменятся на

$$g_i(x(k\Delta), u(k\Delta), k\Delta) \geq 0 \quad (2.10)$$

$$(i=1, \dots, m_k; \quad k=0, 1, \dots, N-1),$$

а показатель качества (2.8) примет вид

$$J(\Delta) = \Phi(x(N\Delta)) + \Delta \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x(k\Delta), u(k\Delta), k\Delta). \quad (2.11)$$

Таким образом, решение задачи (2.5) — (2.8) можно приближенно заменить на решение задачи нахождения последовательностей $\{u(0), u(\Delta), \dots, u[(N-1)\Delta]\}$ и $\{x(0), x(\Delta), \dots, x(N\Delta)\}$, удовлетворяющих (2.6), (2.9), (2.10) и доставляющих показателю качества (2.11) максимальное значение.

§ 3. Типы задач

1. Задача оптимизации конечного состояния (задача 1). В этой задаче качество управления оценивается только функцией от конечного состояния процесса

$$J = \Phi(x(N)),$$

и нужно найти такое допустимое управление u , для которого значения функционала J было бы максимальным. Например, требуется, чтобы количество продукции к концу планируемого периода было максимальным.

Так как в дальнейшем мы будем постоянно ссылаться на эту задачу, сформулируем ее полностью.

Задача 1 (без ограничений на переменные состояния). Найти управление $u = \{u(0), \dots, u(N-1)\}$, удовлетворяющее ограничениям

$$u(k) \in U_k \quad (k=0, 1, \dots, N-1), \quad (3.1)$$

и соответствующую в силу уравнений движения

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \quad (k=0, 1, \dots, N-1) \quad (3.2)$$

с начальным состоянием

$$x(0) = a \quad (3.3)$$

траекторию $x = \{x(0), x(1), \dots, x(N)\}$, для которой показатель качества

$$J = \Phi(x(N)) \quad (3.4)$$

принимает максимальное значение.

Задача 1' (с ограничениями на переменные состояния). Найти управление $u = \{u(0), \dots, u(N-1)\}$ и соответствующую ему в силу уравнений движения (3.2) с начальным условием (3.3) траекторию $x = \{x(0), x(1), \dots, x(N)\}$, удовлетворяющие ограничениям

$$g_i(x(k), u(k), k) \geq 0 \quad (i=1, \dots, m_k; k=0, 1, \dots, N-1) \quad (3.5)$$

и доставляющие показателю качества (3.4) максимальное значение.

2. Задача с суммарным показателем качества (задача 2). В этом случае функционал (2.4) имеет вид

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x(k), u(k), k), \quad (3.6)$$

либо

$$J' = \sum_{k=0}^{N-1} f'_0(x(k+1), u(k), k).$$

Последний случай легко приводится к предыдущему. Действительно, используя (2.3), получим

$$J' = \sum_{k=0}^{N-1} f'_0[f(x(k), u(k), k), u(k), k] = \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x(k), u(k), k).$$

К таким показателям качества приводят, например, задачи управления запасами (§ 1). Ниже (§ 4) будет показано, что задача 2 сводится к частному случаю задачи 1.

3. Задача с фиксированным конечным состоянием (задача 3). В рассмотренных выше случаях начальное состояние $x(0)$ было фиксировано, а на конечное состояние не налагалось никаких дополнительных ограничений. Такие задачи получили название задач со свободным правым концом траектории (со свободным конечным состоянием). Во многих же практических задачах нужно, чтобы конечное состояние было фиксированным: $x(N) = x^*(N)$. Например, при управлении строительством какого-либо объекта, помимо минимизации затрат на строительство, естественно требовать, чтобы объект был построен, т. е. чтобы координаты вектора состояния объекта принимали заданное значение в конце периода управления. Конечно, формально можно считать, что в данном случае множество X_N состоит из одной точки $x^*(N)$, однако, поскольку ограничения типа (2.1) чаще всего связаны с физическим смыслом переменных состояния, а ограничения типа $x(N) = x^*(N)$ — с целью управления, удобнее выделить такие задачи в отдельный класс.

Отметим, что, в отличие от задач со свободным концом траектории, где время управления N обычно фиксировано, в задачах с фиксированным концом траектории число шагов N может быть и не заданным заранее.

Важным случаем задач этого типа является задача об оптимальном быстродействии, когда требуется найти управление, переводящее начальное состояние $x(0)$ в заданное конечное $x(N)$ за минимальное число шагов N . Интересно заметить, что такое управление в дискретном случае, в отличие от непрерывного, часто не единственно (см. § 3.2). Поэтому здесь появляется возможность еще и оптимизировать показатель качества типа (2.4) по всем таким управлениям.

Используя штрафные функции, задачи с фиксированным концом траектории можно свести к задаче со свободным концом. Рассмотрим, например, вместо задачи 3, в которой должно быть $x(N) = x^*(N)$, задачу, в которой на вектор $x(N)$ не наложено никаких условий, но показатель качества (который нужно максимизировать) имеет вид

$$J = -\lambda \sum_{i=1}^n [x_i(N) - x_i^*(N)]^2 + \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x(k), u(k), k),$$

где λ — достаточно большое положительное число. Добавленное выражение в показателе качества представляет собой «штраф», который нужно «заплатить» за невыполнение равенства $x_i(N) = x_i^*(N)$. Очевидно, решая эту задачу, можно получить приближенное, а иногда и точное решение исходной задачи с фиксированным правым концом траектории. Точно такой же прием может быть использован и при решении задачи об оптимальном быстродействии (подробнее методы штрафных функций рассмотрены в § 6.8).

4. Задача со свободным начальным состоянием (задача 4). В этом случае начальное состояние $x(0)$ заранее не фиксируется, а выбирается из заданного множества X_0 , т. е. является, по существу, дополнительной управляющей переменной. Такие задачи, очевидно, легко сводятся к обычным задачам с фиксированным начальным состоянием.

5. Задача с суммарными ограничениями. Часто необходимо учитывать ограничения на переменные состояния и управления, задаваемые на весь период управления (например, расход ресурсов за весь период управления не должен превышать имеющихся запасов). Такие

ограничения обычно можно задать в виде

$$\sum_{k=0}^{N-1} \varphi_j^{(1)}(u(k), k) \geq 0 \quad (j = 1, \dots, m_1), \quad (3.7)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \varphi_j^{(2)}(x(k), k) \geq 0 \quad (j = 1, \dots, m_2), \quad (3.8)$$

или в совместной форме

$$\sum_{k=0}^{N-1} \varphi_j(x(k), u(k), k) \geq 0 \quad (j = 1, \dots, m). \quad (3.9)$$

Ограничения типа (3.7), (3.8) или (3.9) легко привести к обычной задаче управления с ограничениями на конечное состояние системы, расширив систему уравнений (2.3), описывающих процесс.

Рассмотрим общий случай (3.9). Введем новые m координат $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$, положив

$$x_{n+j}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_j(x(i), u(i), i) \geq 0 \quad (j = 1, \dots, m).$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} x_{n+j}(k+1) &= x_{n+j}(k) + \varphi_j(x(k), u(k), k) \quad (k=0, \dots, N-1), \\ x_{n+j}(0) &= 0, \quad x_{n+j}(N) \geq 0 \quad (j=1, \dots, m). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Приписывая к исходной системе уравнений (2.3) уравнения (3.10), получим окончательно процесс, который задается в $(n+m)$ -мерном пространстве состояний уравнением вида

$$\tilde{x}_i(k+1) = f_i(x(k), u(k), k) \quad (i=1, \dots, n+m; k=0, \dots, N-1)$$

с начальным состоянием

$$x_i(0) = a \quad (i=1, \dots, n), \quad x_i(0) = 0 \quad (i=n+1, \dots, n+m)$$

и ограничениями только на конечное состояние системы

$$x_i(N) \geq 0 \quad (i=n+1, \dots, n+m).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(x, u, k) &= f_i(x, u, k) \quad (i=1, \dots, n), \\ \tilde{f}_{n+j}(x, u, k) &= x_{n+j} + \varphi_j(x, u, k) \quad (j=1, \dots, m). \end{aligned}$$

Заметим, что если ограничения имеют вид

$$\sum_{i=0}^{k-1} \varphi_j(x(i), u(i), i) \geq 0 \quad (j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, N),$$

то они заменой переменных (3.10) приводятся к ограничениям вида

$$x_{n+j}(k) \geq 0 \quad (j = 1, \dots, m; k = 0, 1, \dots, N-1).$$

Аналогичным образом задачу с суммарным показателем качества (задача 2) можно свести к задаче оптимизации конечного состояния (задача 1).

Рассмотрим задачу 2 с показателем качества (3.6). Введем дополнительную координату — ось качества x_0 . В результате получим $(n+1)$ -мерное расширенное

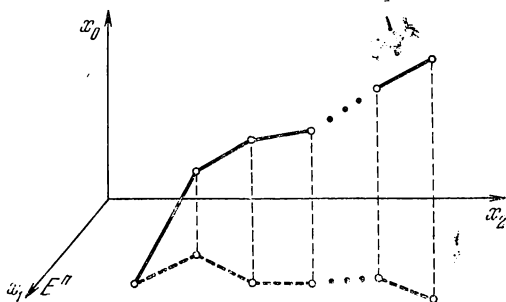


Рис. 1.3.1.

пространство состояний E^{n+1} . Будем считать, что ось качества x_0 направлена «вертикально вверх», а пространство состояний E^n занимает «горизонтальное» положение (рис. 1.3.1). Положим

$$x_0(k) = \sum_{i=0}^{k-1} f_0(x(i), u(i), i).$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} x_0(k+1) &= x_0(k) + f_0(x(k), u(k), k), \\ x_0(0) &= 0, \quad x_0(N) = J. \end{aligned}$$

Таким образом, теперь состояние процесса на k -м шаге характеризуется дополнительной координатой — качеством процесса $x_0(k)$ на этом шаге, и $\tilde{x}(k) = \{x_0(k),$

$x_1(k), \dots, x_n(k)\} \in E^{n+1}$ (все элементы, относящиеся к расширенному пространству состояний, будем отмечать тильдой).

Обозначим

$$x_0(k) + f_0(x(k), u(k), k) = \tilde{f}_0(\tilde{x}(k), u(k), k). \quad (3.11)$$

Тогда в расширенном пространстве состояний процесс (2.3) с показателем качества (3.6) описывается системой уравнений

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{f}(\tilde{x}(k), u(k), k), \quad (3.12)$$

где

$$\tilde{f} = \{\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n\},$$

$$\tilde{x}(0) = \{0, x_1(0), \dots, x_n(0)\},$$

$$\tilde{x}(N) = \{J, x_1(N), \dots, x_n(N)\}.$$

Задачу 2 можно сформулировать теперь следующим эквивалентным образом (рис. 1.3.1).

Задача 2а. В пространстве E^{n+1} задана начальная точка $\tilde{x}(0)$ и уравнения движения (3.12). Требуется найти такое допустимое управление, которое на основании уравнений (3.12) переводит точку $\tilde{x}(0)$ в возможно более высокую точку пространства E^{n+1} за N шагов.

Положим $\tilde{e} = \{1, 0\}$, где $0 \in E^n$; тогда, очевидно, $J = x_0(N) = (\tilde{e}, \tilde{x}(N))$. Здесь и далее через $(\ , \)$ будем обозначать скалярные произведения двух векторов:

$$(a, b) = \sum_{i=1}^n a_i b_i. \text{ Таким образом, задача 2 свелась к частно-$$

му случаю задачи 1, когда функция $\Phi(x)$ линейна:

$$\Phi(\tilde{x}(N)) = (\tilde{e}, \tilde{x}(N)).$$

Сделаем несколько заключительных замечаний. Формально задачи дискретного управления являются полными аналогами соответствующих задач непрерывного управления. Однако область практического применения дискретного управления связана, в основном, с задачами экономики, организации и технологии производства, исследования операций и т. п. Для таких задач характерны наличие большого числа как переменных состояния, так

и переменных управления и ограничений на них (в частности, ограничений на переменные состояния), что определяет тесную связь этих задач с задачами математического программирования.

§ 4. Множества достижимости

В этом параграфе будут введены множества, с помощью которых многошаговые задачи управления могут быть интерпретированы как задачи математического программирования в пространстве состояний X .

Для простоты обозначений будем считать, что уравнения движения (2.3) и ограничения (2.1), (2.2) явно от k не зависят. Рассмотрим сначала задачу без ограничений на переменные состояния.

Фиксируем в пространстве E^n начальное состояние $x(0) = a$ и посмотрим в какие точки $x \in E^n$ можно перевести $x(0) = a$ за один шаг с помощью допустимого управления. Очевидно, эти точки будут определяться множеством

$$R_1(a) = \{x | x = f(a, u), u \in U\}. \quad (4.1)$$

Множества при $k > 1$ определим по индукции

$$R_k(a) = \{x | x = f(z, u), u \in U, z \in R_{k-1}(a)\}. \quad (4.2)$$

Множество $R_k(a)$ ($k=1, 2, \dots$) — это множество всех состояний x в пространстве E^n , в которые можно перевести точку a за k шагов с помощью допустимого управления $\{u(0), u(1), \dots, u(k-1)\}$ (рис. 1.4.1). Назовем $R_k(a)$ множеством достижимости процесса (2.3) (при ограничениях (2.2)).

Используя понятия множеств достижимости, задачу оптимизации конечного состояния (задача 1) можно сформулировать в следующем эквивалентном виде.

Задача 1а. Найти максимальное значение функции $\Phi(x)$ на множестве $R_N(a)$.

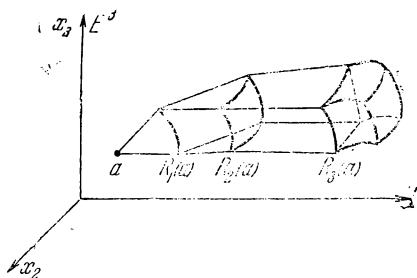


Рис. 1.4.1.

Точно такие же построения можно сделать и для задачи с суммарным показателем качества (задача (2)).

В расширенном пространстве состояний E^{n+1} построим множества

$$\tilde{R}_1(a) = \{\tilde{x} | \tilde{x} = \tilde{f}(\tilde{z}, u), u \in U, z = \{0, a\}\},$$

и далее по индукции

$$\tilde{R}_k(a) = \{\tilde{x} | \tilde{x} = \tilde{f}(\tilde{z}, u), u \in U, z \in \tilde{R}_{k-1}(a)\}.$$

Множества $\tilde{R}_k(a) \subset B^{n+1}$ являются полными аналогами множеств $R_k(a) \subset E^n$ и определяют совокупность состояний пространства E^{n+1} , в которые можно перевести с помощью уравнений движения (3.8) начальное состояние $\tilde{x}(0) = \{0, a\}$ допустимым управлением за k шагов.

Так как оптимальные значения показателя качества находятся на поверхностях, ограничивающих «сверху» множества $\tilde{R}_k(a)$, то вместо множеств $\tilde{R}_k(a)$ удобно рассматривать множества $\tilde{S}_k(a) \subset E^{n+1}$ ($k = 1, \dots, N$), определенные следующим образом:

$$\tilde{S}_1(a) = \{\tilde{x} = \{x_0, x\} \mid \begin{cases} x_0 \leq f_0(a, u), \\ x = f(a, u), \end{cases} u \in U\},$$

$$\tilde{S}_k(a) = \{\tilde{x} = \{x_0, x\} \mid \begin{cases} x_0 \leq f_0(z, u) + z_0, \\ x = f(z, u), \end{cases} u \in U; z \in \tilde{S}_{k-1}(a)\} \\ (k = 2, \dots, N).$$

Если через $\psi_k(x)$ обозначить максимальное качество, которое можно получить при переводе допустимым управлением точки a в точку x за k шагов, то множество $\tilde{S}_k(a)$ представит собой совокупность точек $\tilde{x} = \{x_0, x\}$, для которых $x \in R_k(a)$ и $x_0 \leq \psi_k(x)$. $\tilde{S}_k(a)$ — это часть цилиндра в пространстве E^{n+1} , натянутого на множество $R_k(a)$ (или $\tilde{R}_k(a)$) и ограниченного сверху поверхностью $\psi_k(x)$. Наконец, сравнивая множества $\tilde{S}_k(a)$ и $\tilde{R}_k(a)$, можно видеть, что если $\tilde{z}^1 = \{z_0^1, z^1\} \in \tilde{S}_k(a)$ и $\tilde{z}^2 = \{z_0^2, z^2\} \in \tilde{R}_k(a)$, то всегда $z_0^2 \leq z_0^1$.

Имея в виду эти построения, задачу 2 можно сформулировать в следующем эквивалентном виде.

Задача 2а. Найти наивысшую точку множества $\tilde{S}_N(a)$. Или: найти максимальное значение функции $\psi_N(x)$ на множестве $R_N(a)$.

Итак, исходная задача управления свелась в пространстве состояний к задаче нахождения экстремума функции, заданной на некотором множестве. Особенностью этой задачи математического программирования является то, что множество $\tilde{R}_N(a)$ ($R_N(a)$) не задано в явном виде, а определяется с помощью уравнений (2.3).

Пусть теперь на переменные состояния наложены ограничения (2.1). В этом случае уже не любая точка множества $R_1(a)$ является допустимой, нужно еще чтобы она одновременно принадлежала и множеству X_1 , т. е. x должно принадлежать пересечению этих множеств: $x_1 \in R_1(a) \cap X_1$. Совокупность таких точек и будет определять множество состояний, в которые можно перевести начальное состояние $x(0) = a$ за один шаг с помощью допустимого управления. Такое множество будем также называть множеством достижимости и обозначать через $Q_1(a)$:

$$Q_1(a) = R_1(a) \cap X_1 = \{x | x = f(a, u), u \in U, x \in X_1\}.$$

Множества $Q_k(a)$ при $k > 1$ определяются по индукции

$$Q_k(a) = \{x | x = f(z, u), u \in U, z \in Q_{k-1}(a), x \in X_k\}.$$

Аналогичным образом в E^{n+1} определяются множества достижимости и для задачи 2.

Таким образом, в случае ограничений на переменные состояния задача 1 сводится к нахождению наибольшего значения функции на множестве $Q_N(a)$. Конечно, ограничения (2.1) на переменные состояния могут быть таковы, что вообще не существует ни одного допустимого управления (т. е. множество $Q_N(a)$ пусто), и задача, следовательно, не имеет решения.

§ 5. Линейные системы

Важным классом задач дискретного управления являются задачи, в которых процесс описывается линейными разностными уравнениями вида

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(k) x_j(k) + \sum_{j=1}^r b_{ij}(k) u_j(k) \quad (i = 1, \dots, n),$$

или в векторном виде

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \quad (k=0, \dots, N-1), \quad (5.1)$$

где $A(k) = [a_{ij}(k)]$ ($i, j=1, \dots, n$) и $B(k) = [b_{ij}(k)]$ ($i=1, \dots, n; j=1, \dots, r$) — матрицы размера $(n \times n)$ и $(n \times r)$ соответственно.

Ограничения на переменные в этом случае также задаются в виде линейных неравенств

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}(k) x_j(k) + \sum_{j=1}^r d_{ij}(k) u_j(k) \geq h_i(k) \\ (i=1, \dots, m_h; k=0, 1, \dots, N-1),$$

или в векторной форме

$$C(k)x(k) + D(k)u(k) \geq h(k) \quad (k=0, 1, \dots, N-1), \quad (5.2)$$

где $C(k) = [c_{ij}(k)]$, $D(k) = [d_{is}(k)]$, $h(k) = [h_i(k)]$ ($i=1, \dots, m_h; j=1, \dots, n; s=1, \dots, r$).

Показатель качества в этом случае также обычно аппроксимируют:

$$J = \sum_{k=0}^N \left[\sum_{i,j=1}^n q_{ij}(k) x_i(k) x_j(k) + \sum_{i=1}^n a_i(k) x_i(k) \right] + \\ + \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{i,j=1}^r r_{ij}(k) u_i(k) u_j(k) + \sum_{i=1}^r b_i(k) u_i(k) \right], \quad (5.3)$$

или

$$J = \sum_{k=0}^N \left[(x(k), Q(k)x(k)) + (a(k), x(k)) \right] + \\ + \sum_{k=0}^{N-1} \left[(u(k), R(k)u(k)) + (b(k), u(k)) \right]. \quad (5.4)$$

Здесь $Q(k) = [q_{ij}(k)]$ и $R(k) = [r_{ij}(k)]$ — неположительно определенные матрицы (если ищется максимум J) размера $(n \times n)$ и $(r \times r)$ соответственно.

Часто в показатель качества входят только линейные члены (например, во многих экономических задачах). В этом случае он будет иметь вид

$$J = \sum_{k=0}^N (a(k), x(k)) + \sum_{k=0}^{N-1} (b(k), u(k)). \quad (5.5)$$

Задачи (5.1) — (5.3), (5.5) и (5.1) — (5.4) по аналогии со статическими задачами можно назвать задачами динамического линейного и квадратичного программирования. Их изучение имеет большое значение для разработки методов оптимизации в динамических моделях экономики, а сами задачи могут быть непосредственно интерпретированы в экономических терминах (см. пример 1 в § 1 и §§ 5.11, 5.12).

§ 6. Существование оптимального управления

Прежде чем перейти к условиям оптимальности управления, установим его существование. Для этого необходимо ответить на два вопроса: 1) существует ли вообще хотя бы одно допустимое управление; 2) если такое управление существует, то достигается ли оптимальное?

Заметим, что из утвердительного ответа на первый вопрос еще не следует факта существования оптимального управления. Например, если требуется найти наибольшее значение функции $J(u) = \arctg(1/u)$, причем $0 \leq u \leq 1$, то значение $u^* = 0$, при котором функция $J(u)$ имеет максимум, не достигается, хотя к нему можно приблизиться как угодно близко.

Однако обычные требования непрерывности по известной теореме Вейерштрасса (см. § 2.1) уже обеспечат существование оптимального управления, если есть допустимые управления. Именно, для задачи 1 без ограничений на переменные состояния справедлива.

Теорема 6.1. Пусть в задаче 1 функции $\Phi(x)$ и $f_j(x, u, k)$ ($j=1, \dots, n$; $k=0, 1, \dots, N-1$) непрерывны по своим аргументам $x \in E^n$ и $u \in U_k$, а U_k — ограниченные замкнутые и непустые множества.

Тогда оптимальное управление u^* существует для любого начального состояния $x(0)$; при этом качество J^* , соответствующее оптимальному управлению, принимает конечное значение.

З а м е ч а н и е. Если множества U_k задаются неравенствами типа (2.2), то для его замкнутости достаточно потребовать, чтобы функции $g_j(u, k)$ ($j=1, \dots, m_k$; $k=0, 1, \dots, N-1$) были непрерывными. Для того чтобы обеспечить ограниченность множеств U_k , достаточно

прибавить к неравенствам (2.2) ограничения $|u_j(k)| \leq M$ ($j=1, \dots, r$), где M — достаточно большое число.

Утверждение теоремы почти очевидно. Действительно, задача оптимального управления 1 сводится к нахождению максимального значения функции многих переменных $J(x(0), u(0), \dots, u(N-1))$, определенных через уравнения движения (3.2) и показатель качества (3.4), которая задана на прямом произведении N ограниченных и замкнутых множеств U_k (начальное состояние $x(0)$ считается фиксированным). В силу сделанных предположений функция $J(x(0), u(0), \dots, u(N-1))$ должна быть непрерывна. Отсюда следует утверждение теоремы. Мы не будем, однако, уточнять эти рассуждения, а приведем несколько иное доказательство, связанное с геометрией процесса и легко обобщающееся на случай фазовых ограничений.

Доказательство. Как было показано в § 4, задача 1 сводится к нахождению наибольшего значения функции $\Phi(x)$ на множестве $R_N(a)$. Если функция $\Phi(x)$ непрерывна, а множество $R_N(a)$ ограничено и замкнуто (т. е. компактно), то по известной теореме Вейерштрасса (§ 2.1) наибольшее значение функции $\Phi(x)$ на множестве $R_N(a)$ достигается, и оно конечно. Поэтому теорема будет доказана, если будет установлена компактность $R_N(a)$ для любого начального состояния $x(0) = a$. Действительно, множество $R_1(a)$ представляет собой образ непрерывного отображения компактного множества U_0 в пространстве E^n : $R_1(a) = f(a, U_0, 0)$ и, следовательно, компактно. Допустим теперь, что множество $R_{k-1}(a)$ компактно. Тогда компактно прямое произведение $R_{k-1}(a) \times U_{k-1}$. Следовательно, множество $R_k(a) = f(R_{k-1}(a), U_{k-1}, k-1)$ также компактно. Теорема доказана.

Аналогичным образом устанавливаются условия существования оптимального управления и для задачи 2.

Заметим, что условия теоремы выполняются почти во всех реальных задачах. Поэтому оптимальное управление существует практически для любой задачи дискретного управления без ограничений на переменные состояния.

Если же значения переменных состояния ограничены условиями (2.1), то в этом случае приобретает значение первый вопрос, а именно, существует ли вообще хотя бы

одно допустимое управление. Этот вопрос рассматривается в главе VI, где будет дана процедура, позволяющая находить допустимые управления в этом случае (если они есть). Здесь же отметим, что, очевидно, для существования допустимого управления вовсе недостаточно, чтобы множества X_k и U_k были непустыми. Если же допустимое управление существует, то достижимость оптимального управления обеспечивается такими же условиями непрерывности, что и в теореме 6.1.

Сформулируем их для общей задачи с показателем качества (2.4).

Теорема 6.2. Пусть множества $U_k (k=0, \dots, N-1)$ и $X_k (k=0, \dots, N)$ ограничены и замкнуты, а функции $\Phi(x)$, $f_j(x, u, k) (j=1, \dots, n; k=0, \dots, N-1)$ непрерывны. Если при этом для некоторого начального состояния $x(0)=a$ существует хотя бы одно допустимое управление, то существует и оптимальное, при этом оптимальное качество J^ имеет конечное значение.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.1 и следует из компактности множеств достижимости $Q_k (k=1, \dots, N)$ и непрерывности функции $\Phi(x)$ для этой задачи.

ОДНОШАГОВАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

Поскольку методы решения многошаговых задач существенно используют идеи и понятия теории математического программирования (имеется в виду теория оптимизации статических, одношаговых задач*), в этой главе рассмотрены основы этой теории. При этом внимание обращается не на сами результаты и их доказательства (они достаточно хорошо известны), а, скорее, на идеи и методы, используемые при их получении.

§ 1. Некоторые сведения из n -мерной геометрии и теории выпуклых множеств

В дальнейшем понадобятся некоторые сведения из n -мерной геометрии и теории выпуклых множеств. Приведем их здесь для справок.

Рассмотрим n -мерное *евклидово* пространство E^n со скалярным произведением двух векторов $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Длиной, или *нормой* вектора x , назовем число

$$|x| = (x, x)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Шаром радиуса ε с центром в точке x^* назовем множество точек $x \in E^n$ для которых

$$|x - x^*| < \varepsilon.$$

Будем обозначать такой шар через $S_\varepsilon(x^*)$. Он образует ε -окрестность точки x^* .

Если множество $R \subset E^n$ содержит вместе с точкой x и ее ε -окрестность при некотором $\varepsilon > 0$, то назовем x *внутренней* точкой множества R . Если в любой окрестности x

*) Постановку одношаговой задачи оптимизации см. в § 2 этой главы.

содержатся как точки из R , так и не принадлежащие R точки, то назовем x *граничной* точкой множества R .

Множество, содержащее все свои граничные точки, называется *замкнутым*. Присоединение к множеству R его граничных точек называется *замыканием множества* R и обозначается через $\bar{R}$.

Если множество R целиком содержится в шаре радиуса ρ , где ρ — конечное число, то такое множество называется *ограниченным*.

Ограниченное и замкнутое множество в E^n является компактным множеством. Если множество R задано с помощью систем неравенств*)

$$f_j(x) \geq 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (1.1)$$

или

$$f_j(x) \leq 0 \quad (j=1, \dots, m), \quad (1.2)$$

где $f_j(x)$ ($j=1, \dots, m$) — непрерывные функции, то оно всегда замкнуто, хотя может быть и не ограниченным.

Можно показать, что непрерывная функция $\Phi(x)$, заданная на компактном множестве R , достигает на нем как верхней, так и нижней грани (*теорема Вейерштрасса*), т. е. существуют такие точки x^1, x^2 , что

$$\Phi(x^1) = \sup_{x \in R} \Phi(x) = \max_{x \in R} \Phi(x),$$

$$\Phi(x^2) = \inf_{x \in R} \Phi(x) = \min_{x \in R} \Phi(x).$$

Возьмем произвольные две точки x^1 и x^2 из R . Совокупность точек вида $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$, где $0 \leq \lambda \leq 1$, образует *отрезок* с концами в точках x^1 и x^2 .

Множество R называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками $x^1, x^2 \in R$ оно содержит и соединяющий их отрезок, т. е. если $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in R$ при $x^1, x^2 \in R, 0 \leq \lambda \leq 1$.

Множество R называется *выпуклым по направлению e* , если для любых x^1 и x^2 из R существует такое число $\mu \geq 0$, что $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 + \mu e \in R$ при $0 \leq \lambda \leq 1$.

На рис. 2.1.1 а, б показаны примеры выпуклых по направлению множеств. Из определений и этих примеров

*) Любая из этих систем неравенств сводится к другой умножением на -1 .

видно, что выпуклое по направлению множество является, вообще говоря, не выпуклым просто; с другой стороны, выпуклое множество в E^n всегда выпукло по любому направлению $e \in E^n$.

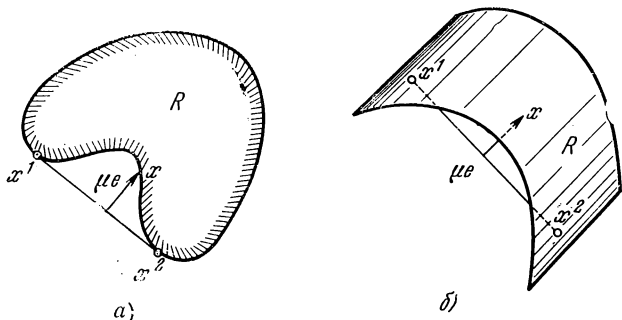


Рис. 2.1.1.

Функция $\Phi(x)$ называется *выпуклой вверх* (вогнутой), если для любых двух точек x^1 и x^2

$$\Phi[\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2] \geq \lambda \Phi(x^1) + (1-\lambda)\Phi(x^2) \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Функция $\Phi(x)$ называется *выпуклой вниз* (просто выпуклой), если

$$\Phi[\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2] \leq \lambda \Phi(x^1) + (1-\lambda)\Phi(x^2) \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Если множество R образовано с помощью неравенств (1.1), где $f_j(x)$ — выпуклые вверх функции, либо с помощью неравенств (1.2), где $f_j(x)$ — выпуклые вниз функции, то можно показать, что множество R будет выпуклым.

Говорят, что вектор x^* доставляет функции $\Phi(x)$ *глобальный максимум* на множестве R , если $\Phi(x^*) \geq \Phi(x)$ для всех $x \in R$. Если же $\Phi(x^*) \geq \Phi(x)$ только для $x \in S(x^*) \cap R$, то говорят, что точка x^* доставляет функции $\Phi(x)$ на множестве R лишь *локальный максимум*.

Показывается, что локальный максимум совпадает с глобальным для выпуклой вверх функции $\Phi(x)$, заданной на выпуклом множестве R , а локальный минимум совпадает с глобальным минимумом для выпуклой вниз функции $\Phi(x)$ на выпуклом множестве R .

Множество точек $x \in E^n$, удовлетворяющих условию

$$(p, x) = \alpha, \quad (1.3)$$

называется *гиперплоскостью*. Вектор p ортогонален этой гиперплоскости.

Гиперплоскость (1.3) порождает пару полупространств в E^n :

$$E_-^n = \{x | (p, x) \leq \alpha, x \in E^n\}, \quad E_+^n = \{x | (p, x) \geq \alpha, x \in E^n\}.$$

Говорят, что гиперплоскость (1.3) разделяет множества R_1 и R_2 , если

$$(p, x) \leq \alpha \quad \text{для всех } x \in R_1$$

и

$$(p, x) \geq \alpha \quad \text{для всех } x \in R_2.$$

Если эти неравенства являются строгими, то будем говорить, что гиперплоскость (1.3) *строго разделяет* множества R_1 и R_2 .

Пусть R_1 и R_2 — произвольные замкнутые выпуклые множества, не имеющие общих точек; при этом хотя бы одно из них ограничено. Тогда можно доказать, что существует гиперплоскость, строго разделяющая эти множества (*теорема о разделяющей гиперплоскости*).

Гиперплоскость $(p, x) = \alpha$ называется *опорной гиперплоскостью множества R в точке $x^* \in R$* , если R содержится в одном из полупространств, задаваемых этой гиперплоскостью, и граница R имеет с ней хотя бы одну общую точку. Таким образом, гиперплоскость $(p, x) = \alpha$ является опорной для множества R в точке $x^* \in R$, если

$$\max_{x \in R} (p, x) = (p, x^*) = \alpha,$$

или, положив $q = -p$,

$$\min_{x \in R} (q, x) = (q, x^*) = -\alpha.$$

Можно показать, что для любой граничной точки выпуклого замкнутого множества существует опорная гиперплоскость в этой точке.

Множество $K(x^*)$ называется *конусом* с вершиной в точке x^* , если для любых $x \in K(x^*)$ и любого $\varepsilon \geq 0$

$$x^* + \varepsilon(x - x^*) \in K(x^*).$$

Конус $K(x^*)$ может быть, вообще говоря, не выпуклым. Множество $\tilde{K}(x^*)$ называется *выпуклым конусом*

с вершиной в точке x^* , если для любых $x, y \in \tilde{K}(x^*)$, $\alpha, \beta \geq 0$

$$\alpha(x - x^*) + \beta(y - x^*) \in \tilde{K}(x^*).$$

Так, полупространство $\{x \mid (p, x - x^*) \leq 0\}$ в E^n — выпуклый конус.

Выпуклым многогранным конусом $C(x^*)$ с вершиной в точке x^* называется пересечение конечного числа полупространств, образованных гиперплоскостями, проходящими через эту точку x^* .

Таким образом, выпуклый многогранный конус это множество точек $x \in E^n$, удовлетворяющих неравенствам $(p^i, x - x^*) \leq 0$ ($i = 1, \dots, m$).

§ 2. Постановка задачи

Формулировка одношаговой задачи оптимизации состоит в следующем.

З а д а ч а. В пространстве E^n задано некоторое допустимое множество R . Выбор решения — вектора $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ из этого множества R характеризуется некоторым качеством — функцией $\Phi(x)$. Требуется найти такой вектор x^* из множества R , для которого функция $\Phi(x)$ принимает экстремальное (далее, для определенности, максимальное) значение.

Будем предполагать для простоты, что R — ограниченное, замкнутое и непустое множество, а $\Phi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция на R^* .

В этом случае максимальное значение функции $\Phi(x)$ на множестве R достигается, и задача может быть записана в виде

$$\max_{x \in R} \Phi(x). \quad (2.1)$$

Обычно множество R задается с помощью системы неравенств (см. § 1)

$$f_j(x) \geq 0 \quad (j = 1, \dots, m). \quad (2.2)$$

Будем считать, что $f_j(x)$ — непрерывно-дифференцируемые функции, а неравенства (2.2) непротиворечивы.

*) Более точно, будем считать, что $\Phi(x)$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой области $R' \supset R$.

Иногда удобно сводить задачу (2.1) к следующему каноническому виду, вводя дополнительную ось — качество $x_0 = \Phi(x)$. Определим в пространстве E^{n+1} множество $\tilde{R}$:

$$\tilde{R} = \{ \{x_0, x\} \mid x_0 \leq \Phi(x), x \in R \}. \quad (2.3)$$

Если множество R задано с помощью системы неравенств (2.2), то $\tilde{R}$ можно задать в виде неравенств

$$\tilde{f}_j(\tilde{x}) \geq 0 \quad (j=0, \dots, m), \quad (2.4)$$

где $\tilde{x} = \{x_0, x\}$, $\tilde{f}_0(\tilde{x}) = \Phi(x) - x_0$, $\tilde{f}_j(\tilde{x}) = f_j(x)$ ($j=1, \dots, m$).

Введем в пространстве E^{n+1} вектор $\tilde{e} = \{1, 0\}$. Тогда задача (2.1) запишется в виде: найти $\max(\tilde{e}, \tilde{x})$ при ограничениях (2.4).

В зависимости от вида функций $f_j(x)$, $\Phi(x)$ различают следующие типы задач оптимизации.

Если функции $f_j(x)$, $\Phi(x)$ линейны:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \sum_{i=1}^n a_{0i} x_i = (a_0, x), \\ f_j(x) &= \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i = (a_j, x) \quad (j=1, \dots, m), \end{aligned} \quad (2.5)$$

то это задача *линейного программирования*.

Нахождение максимума квадратичной функции

$$\Phi(x) = (x, Qx) + (a_0, x),$$

где $Q = [q_{ij}]$ ($i, j=1, \dots, n$) — отрицательно определенная матрица, при линейных ограничениях (2.5) является задачей *квадратичного программирования*.

Наконец, если функции $\Phi(x)$, $f_j(x)$ нелинейны, но выпуклы вверх, то это задача *выпуклого программирования*.

Во всех этих задачах неравенства $f_j(x) \geq 0$ ($j=1, \dots, m$) задают выпуклое замкнутое множество (возможно, неограниченное), функция $\Phi(x)$ по условиям выпукла вверх. Поэтому для этих задач локальный максимум совпадает с глобальным. Такие задачи принято называть *одноэкстремальными*. Для них необходимые условия оптимальности (при некоторых условиях регулярности) являются одновременно и достаточными (см. § 6).

§ 3. Конусы допустимых вариаций

Пусть x — некоторая точка множества R . Рассмотрим новый вектор $x + \delta x$, где вектор δx имеет размерность вектора x и определяет *вариацию* δx . Совокупность вариаций $\delta x = \{\delta x_1, \dots, \delta x_n\}$ образует n -мерное *пространство вариаций* δX . Будем считать, для наглядности, что началом координат этого пространства является точка x . Среди всевозможных вариаций δx выделим такие, при которых достаточно малые шаги вдоль вектора δx не выводят точку x за пределы множества R . Такие вариации назовем допустимыми.

Более точно, δx — *допустимая вариация* в точке $x \in R$, если найдется такое число $\varepsilon_1 > 0$ (зависящее от x и δx), что $x + \varepsilon \delta x \in R$ для любых $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.

Если множество R выпукло, то для того, чтобы вариация δx была допустимой, достаточно существования хотя бы одного $\varepsilon_1 > 0$, при котором $x + \varepsilon_1 \delta x \in R$. (В этом случае из выпуклости R следует, что точки $x + \varepsilon \delta x$ будут принадлежать множеству R для любых $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.)

Совокупность допустимых вариаций в точке x образует (в пространстве вариаций δX) конус $K(x)$ с вершиной в начале координат пространства вариаций (рис. 2.3.1).

Этот конус будем называть *конусом допустимых вариаций*. Таким образом,

$$K(x) = \{\delta x \mid x + \varepsilon \delta x \in R, 0 < \varepsilon < \varepsilon_1, x \in R\}.$$

Отметим несколько свойств конуса $K(x)$.

Конус $K(x)$ — непустое множество, так как начало координат (пространства δX) принадлежит конусу $K(x)$. Конус $K(x)$ может быть открытым множеством (рис. 2.3.1, а, 2.3.1, г), либо замкнутым (рис. 2.3.1, б, 2.3.1, д), либо не замкнутым и не открытым (рис. 2.3.1, в).

В вырожденных случаях конус $K(x)$ может не иметь внутренней точки (рис. 2.3.1, д), либо вообще состоять из одного начала координат пространства вариаций (рис. 2.3.1, е, ж).

В общем случае конус $K(x)$ — не выпуклое множество (рис. 2.3.1, г).

Поскольку случаи типа рис. 2.3.1, г, д, ж имеют скорее чисто теоретический интерес, в дальнейшем будут рас-

считаться такие конусы $K(x)$ допустимых вариаций, которые

- 1) выпуклы,
- 2) имеют внутренние точки.

Однако при таких условиях на конус допустимых вариаций исключается и случай, когда множество R представляет собой, например, некоторую поверхность в E^n

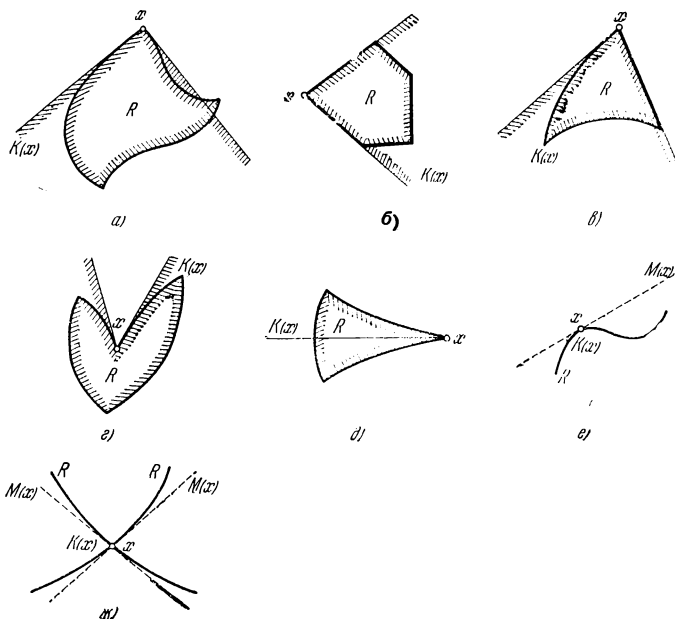


Рис. 2.3.1.

(точнее, некоторое многообразие размерности, меньшей n) и, следовательно, не имеет внутренних точек в E^n (рис. 2.3.1, е). Между тем множества достижимости, построенные в главе I, могут представлять именно этот случай. Поэтому возникает необходимость ослабить ограничения на определение допустимых вариаций.

Будем называть вектор δx *допустимой вариацией* в точке $x \in R$ в широком смысле слова, если для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое число ε ($0 < \varepsilon < \varepsilon_1$) и вектор

$w \in S_{\varepsilon_1}(\delta x)$, (где $S_{\varepsilon_1}(\delta x)$ — шар радиуса ε_1 с центром в точке δx), что $x + \varepsilon w \in R$ (см. рис. 2.3.2).

Если обозначить через $v = w - \delta x$ вектор, исходящий из начала вектора δx (его длина, очевидно, не превосходит ε_1), то $x + \varepsilon \delta x + \varepsilon v \in R$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, где $|v| < \varepsilon_1$.

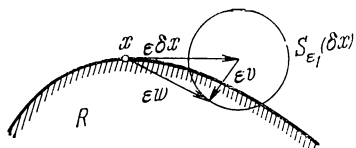


Рис. 2.3.2.

Таким образом, обобщая несколько данное выше определение, назовем вектор δx допустимым в широком смысле вариацией в точке $x \in R$, если существует число

$\varepsilon_1 > 0$ и вектор $o(\varepsilon)$, непрерывно зависящий от ε , что $x + \varepsilon \delta x + o(\varepsilon) \in R$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.

Здесь и в дальнейшем через $o(\varepsilon)$ будем обозначать величины (как векторные, так и скалярные) более высокого порядка малости, чем ε , т. е. $\frac{|o(\varepsilon)|}{\varepsilon} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Конус допустимых в широком смысле вариаций в точке x будем обозначать через $M(x)$:

$$M(x) = \{\delta x | x + \varepsilon \delta x + \varepsilon v \in R, 0 < \varepsilon < \varepsilon_1, |v| < \varepsilon_1, x \in R\}.$$

Можно показать, что $M(x)$ — всегда замкнутый конус, хотя может быть не выпуклым (рис. 2.3.1, г, ж). Если конус $K(x)$ удовлетворяет сформулированным выше требованиям, то его замыкание совпадает с конусом $M(x)$ (рис. 2.3.1, а, б, в). Если же множество R представляет гладкую гиперповерхность в пространстве E^n (рис. 2.3.1, е), то конус $M(x)$ — гиперплоскость, касательная к R в точке x , в то время как конус $K(x)$ состоит только из точки x (начала координат пространства δX).

Из определения конуса $M(x)$ следует, что если $\delta x \in M(x)$, то всегда существует дуга, исходящая из точки x и целиком лежащая в R , которая дифференцируема в точке x и для которой δx является касательным вектором в этой точке.

Пусть теперь множество R задается с помощью непрерывно-дифференцируемых функций $f_j(x)$:

$$f_j(x) \geq 0 \quad (j=1, \dots, m).$$

Выберем некоторую точку x , удовлетворяющую этим неравенствам (по предположению такая точка существует),

и обозначим через $J(x)$ множество индексов из $j=1, \dots, m$, при которых $f_j(x)=0$. Такие ограничения обычно называются *активными*.

Обозначим также через $\frac{\partial f_j(x)}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_n} \right\}$ градиент функции $f_j(x)$ в этой точке.

Пусть x — граничная точка множества R (следовательно, множество индексов $J(x)$ непусто). Рассмотрим множество векторов δx из пространства вариаций δX , удовлетворяющих системе линейных неравенств

$$\left(\frac{\partial f_j(x)}{\partial x}, \delta x \right) \geq 0 \quad (j \in J(x)). \quad (3.1)$$

Положим $\delta x = z - x$. Уравнение

$$\left(\frac{\partial f_j(x)}{\partial x}, z - x \right) = 0$$

представляет собой гиперплоскость в пространстве X , касательную к поверхности $f_j(x)=0$ в точке x . Таким образом, совокупность точек δx пространства вариаций δX , удовлетворяющих системе неравенств (3.1), ограничено гиперплоскостями $\left(\frac{\partial f_j(x)}{\partial x}, \delta x \right) = 0$ ($j \in J(x)$), пересекающимися в начале координат пространства δX , и образует, следовательно, выпуклый конус с вершиной в начале координат (в точке x).

Обозначим этот конус через $C(x)$. Таким образом,

$$C(x) = \left\{ \delta x \left| \left(\frac{\partial f_j(x)}{\partial x}, \delta x \right) \geq 0, \quad j \in J(x) \right. \right\}.$$

Наложим на него следующее *условие регулярности*: существует вариация $\delta x \in C(x)$, при которой

$$\left(\frac{\partial f_j(x)}{\partial x}, \delta x \right) > 0 \quad (3.2)$$

для всех $j \in J(x)$, т. е. конус $C(x)$ должен иметь внутренность (следовательно, случаи типа рис. 2.3.1, δ , e исключаются).

Достаточное условие для выполнения (3.2) состоит в линейной независимости векторов $\partial f_j(x)/\partial x$ ($j \in J(x)$).

Если конусы $K(x)$ и $C(x)$ удовлетворяют сформулированным выше условиям, то можно показать, что конус

$C(x)$ совпадает с замыканием конуса $K(x)$ или, что то же самое, с конусом $M(x)$ (в случае, если конус $M(x)$ выпуклый, см. рис. 2.3.1).

Выше были наложены условия регулярности на конусы допустимых направлений $K(x)$ и $M(x)$, которые обеспечивают их эквивалентность. На само множество R условий регулярности не налагалось.

Пусть теперь R — выпуклое множество. Потребуем, чтобы оно имело внутренние точки, т. е. пусть существует точка $\bar{x}$ такая, что

$$f_j(\bar{x}) > 0 \quad (3.3)$$

для всех $j=1, \dots, m$ (условие регулярности Слейтера).

В этом случае нетрудно видеть, что условия регулярности на конусы $C(x)$ и $K(x)$ выполнены. Следовательно, если множество R выпукло и удовлетворяет условию Слейтера (или хотя бы удовлетворяет этим требованиям в некоторой окрестности точки $\bar{x}$), то конус $C(x)$ совпадает с замыканием конуса $K(x)$.

§ 4. Условия оптимальности. I

Итак, конусы допустимых вариаций показывают, в каком направлении можно двигаться из точки $x \in R$, с тем, чтобы получающиеся при этом новые точки были все еще допустимыми, либо близки к ним в некотором смысле.

Выделим теперь среди допустимых вариаций точки x подходящие, т. е. такие, которые обеспечивают возрастание функции $\Phi(x)$. Назовем допустимую вариацию δx в точке x *подходящей* в этой точке, если существует число $\varepsilon_1 > 0$, что

$$\Phi(x + \varepsilon \delta x) > \Phi(x)$$

при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.

Так как, по предположению, $\Phi(x)$ — дифференцируемая функция, то

$$\begin{aligned} \Phi(x + \varepsilon \delta x) - \Phi(x) &= \varepsilon \delta \Phi(x) + o(\varepsilon) = \\ &= \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}, \delta x \right) + o(\varepsilon) > 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Следовательно, вариация δx — подходящая, если

$$\left(\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}, \delta x \right) > 0. \quad (4.2)$$

Неравенство (4.2) очевидно: градиент $\partial\Phi/\partial x$ показывает направление наибольшего возрастания функции $\Phi(x)$ в точке x ; если вектор δx составляет острый угол с градиентом, то, сделав шаг конечной длины вдоль δx , можно увеличить значение $\Phi(x)$. Ясно, что чем больше величина скалярного произведения (4.2) (чем острее угол), тем на большую величину возрастает функция $\Phi(x)$.

Очевидно, если точка x^* оптимальная, то в этой точке не может существовать подходящих допустимых вариаций. С другой стороны, если в точке x^* не существует подходящих допустимых вариаций, то эта точка доставляет функции $\Phi(x)$, во всяком случае, локальный максимум (при некоторых дополнительных условиях на $\Phi(x)$ и R в окрестности точки x^* ; например, $\Phi(x)$ и R должны быть выпуклы в некоторой окрестности точки x^*). Сформулируем эти утверждения в виде теоремы.

Теорема 4.1. Пусть $\Phi(x^*)$ — максимальное значение функции $\Phi(x)$ на множестве R . Тогда справедливо неравенство

$$\left(\frac{\partial\Phi(x^*)}{\partial x}, \delta x^*\right) \leq 0 \quad (4.3)$$

для всех $\delta x^* \in \bar{K}(x^*)$.

Доказательство. Если конус $\bar{K}(x^*)$ состоит только из начала координат пространства δX , то утверждение (4.3) тривиально. Поэтому будем считать, что существуют ненулевые вариации δx^* из $\bar{K}(x^*)$. Для доказательства неравенства (4.3) в этом случае допустим противное. Пусть существует допустимая вариация δx^* в точке x^* ($\delta x^* \in \bar{K}(x^*)$) такая, что

$$\left(\frac{\partial\Phi(x^*)}{\partial x}, \delta x^*\right) > 0. \quad (4.4)$$

По определению конуса $K(x^*)$, найдется такое $\varepsilon_1 > 0$, что $x^* + \varepsilon \delta x^* \in R$ для любых $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Из разложения (4.1) и неравенства (4.4) следует, что можно выбрать такое ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, что $\Phi(x^* + \varepsilon \delta x^*) > \Phi(x^*)$ и в то же время $x^* + \varepsilon \delta x^* \in R$. Противоречие.

Пусть теперь множество R задано неравенствами (2.2), и пусть точка x^* — оптимальная. Построим в этой точке

конус допустимых вариаций $S(x^*)$. Будем предполагать, что он удовлетворяет условию регулярности (3.2). Тогда можно показать (см., например, Зойтендейк [1]), что необходимые условия оптимальности будут иметь следующий вид.

Теорема 4.2. Если x^* — максимальное значение функции $\Phi(x)$ при ограничениях (2.2), то

$$\left(\frac{\partial \Phi(x^*)}{\partial x}, \delta x^* \right) \leq 0 \quad (4.5)$$

для любых δx^* , удовлетворяющих неравенствам

$$\left(\frac{\partial f_j(x^*)}{\partial x}, \delta x^* \right) \geq 0, \quad j \in J(x^*). \quad (4.6)$$

§ 5. Принцип максимума

Заметим, что неравенство (4.3), так как $\delta x^* \in \bar{K}(x^*)$, можно записать в виде равенства

$$\max_{\delta x^* \in \bar{K}(x^*)} (p^*, \delta x^*) = 0, \quad (5.1)$$

где

$$p^* = \frac{\partial \Phi(x^*)}{\partial x}. \quad (5.2)$$

Таким образом, гиперплоскость $(p^*, \delta x^*) = 0$ пространства вариаций δX является опорной конусу $K(x^*)$ в его вершине.

Итак, если x^* доставляет максимальное значение функции $\Phi(x)$ на множестве R , то всегда существует гиперплоскость $(p^*, \delta x^*) = 0$ в пространстве вариаций δX , опорная конусу допустимых вариаций в его вершине (см. рис. 2.5.1, а).

О поведении соответствующей гиперплоскости $(p^*, x) = (p^*, x^*)$ пространства X в общем случае, по существу, сказать ничего нельзя. Если же потребовать выпуклость множества R , то тогда очевидно, что гиперплоскость $(p^*, x) = (p^*, x^*)$ будет опорной множеству R в точке $x^* \in R$, т. е. (рис. 2.5.1, б)

$$\max_{x \in R} (p^*, x) = (p^*, x^*).$$

Действительно, допустим противное. Пусть существует точка $x \in R$ такая, что $(p^*, x) > (p^*, x^*)$. Пусть $\delta x = x - x^*$, тогда $(p^*, \delta x) > 0$.

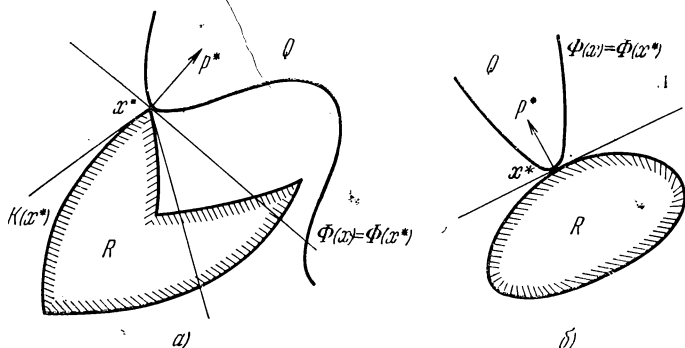


Рис. 2.5.1.

Так как множество R выпуклое, то $\lambda x + (1-\lambda)x^* = x^* + \lambda \delta x \in R$ при $0 \leq \lambda \leq 1$. Следовательно, $\delta x \in K(x^*)$. Но тогда δx — подходящая допустимая вариация в оптимальной точке x^* , что противоречит теореме 4.1.

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 5.1. Пусть функция $\Phi(x)$ в точке x^* достигает максимального значения на множестве R . Тогда, если R выпукло, в этой же точке достигает максимального значения линейная функция (p^*, x) , т. е.

$$\max_{x \in R} (p^*, x) = (p^*, x^*),$$

где вектор p^* определяется из (5.2).

Заметим, что если функция $\Phi(x)$ выпукла, то в оптимальной точке x^* гиперплоскость $(p^*, x) = (p^*, x^*)$ является опорной не только к множеству R , но и к выпуклому множеству $Q = \{x | \Phi(x) \geq \Phi(x^*)\}$, т. е. $(p^*, x) \leq (p^*, x^*)$ для всех $x \in R$ и $(p^*, x^*) \leq (p^*, x)$ для всех $x \in Q$.

Таким образом, эта гиперплоскость является разделяющей для выпуклых множеств R и Q .

§ 6. Условия одноэкстремальности

Заметим, что при формулировке теоремы 5.1 не требовалось выпуклости функции $\Phi(x)$. Если же помимо выпуклости множества R потребовать еще и выпуклость вверх функции $\Phi(x)$, то в этом случае функция $\Phi(x)$ будет иметь одно экстремальное значение — максимальное — на множестве R (хотя оно может достигаться и не в одной точке). Очевидно, при этом необходимые условия оптимальности, сформулированные в теоремах 4.1, 4.2, 5.1, переходят в достаточные, т. е. справедливы.

Теорема 6.1. Пусть R — выпуклое множество, а $\Phi(x)$ — выпуклая вверх функция. Тогда условия теоремы 4.1 (или 5.1, что в данном случае одно и то же) достаточны для того, чтобы функция $\Phi(x)$ имела в точке x^* максимальное значение на множестве R .

Действительно, пусть существует такая точка $\bar{x} \in R$, что $\Phi(\bar{x}) > \Phi(x^*)$. В силу выпуклости множества R

$$x = \bar{x} + \lambda(\bar{x} - x^*) \in R \quad \text{при} \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

В силу выпуклости функции

$$\Phi(x) \geq \lambda\Phi(\bar{x}) + (1-\lambda)\Phi(x^*) = \Phi(x^*) + \lambda[\Phi(\bar{x}) - \Phi(x^*)]$$

при $0 \leq \lambda \leq 1$.

Таким образом, в точке x^* существует такая допустимая вариация $\delta x = \bar{x} - x^*$, при которой $\Phi(\bar{x}) > \Phi(x^*)$, т. е. δx — подходящая вариация и, следовательно, в оптимальной точке x^* выполнено (4.4). Противоречие.

§ 7. Двойственность

На основе полученных в предыдущих параграфах условий оптимальности может быть составлена некоторая общая схема получения оптимального решения. Суть ее состоит в следующем. Выбирается некоторое допустимое (т. е. удовлетворяющее ограничениям) решение и предлагаются способы, каким образом следует изменить на малую величину это решение, с тем, чтобы его улучшить (т. е. получить большее значение показателя качества, не нарушив при этом ограничений). В результате определяется новое решение и т. д. Если в какой-то точке (малых)

вариаций не найдется, то это решение локально оптимальное (при некоторых дополнительных условиях). Если гарантированы еще и условия одноэкстремальности, то такое решение оптимально вообще, т. е. доставляет показателю качества наибольшее значение при данных ограничениях. Совокупность методов, объединяемых этой общей схемой, получила название прямых.

Теперь рассмотрим другой подход, который позволяет рассмотреть исходную задачу оптимизации в целом и оценить оптимальное решение, исходя из решения другой, часто в некоторых отношениях более простой экстремальной задачи. Собственно, этот подход был уже намечен в § 5.

Пусть по-прежнему требуется найти максимум функции $\Phi(x)$ на множестве R . Считаем, что множество R выпукло и ограничено, а функция $\Phi(x)$ выпукла вверх, т. е. рассматриваемая задача имеет одно экстремальное значение. Допустим, кроме того, что это экстремальное значение достигается на границе множества R .

Тогда вместо исходной задачи оптимизации $\Phi(x)$ на R рассмотрим следующую задачу. Выберем некоторый вектор $p \neq 0$ и решим задачу

$$\max_{x \in R} (p, x) = (p, x(p)). \quad (7.1)$$

Допустим вначале, что решение $x(p)$ задачи (7.1) при каждом $p \neq 0$ единственно (например, если множество R строго выпукло). Тогда $x(p)$ — граничная точка R , а гиперплоскость $(p, x) = (p, x(p))$ — опорная множеству R в этой точке.

Выбирая различные p и решая задачу (7.1), можно получить все граничные точки множества R (в случае его выпуклости). Так как по предположению экстремальная точка находится на границе множества R , то искомую задачу можно заменить задачей нахождения такого p , при котором функция $\psi(p) = \Phi(x(p))$, где $x(p)$ определяется из решения задачи (7.1), максимальна, т. е.

$$\max_{x \in R} \Phi(x) = \max_p \psi(p). \quad (7.2)$$

Если же решение задачи (7.1) достигается на некотором множестве $X(p)$ (каждая точка которого является граничной множества R), то тогда «функция» $\Phi(X(p))$

будет уже многозначной. В этом случае функцию $\psi(p)$ построим следующим образом: $\psi(p) = \max_{x \in X(p)} \Phi(x)$, где

$X(p)$ — множество решений задачи (7.1), и эквивалентность (7.2) опять сохраняется. Задача нахождения $\max_p \psi(p)$ получила название двойственной задачи (в отличие от прямой: $\max_{x \in R} \Phi(x)$), а методы определения оптимального решения с помощью опорных гиперплоскостей — двойственными.

Отметим, что часто задача (7.1) решается просто, а задача $\max_p \psi(p)$ не имеет, по существу, ограничений на переменные p^*).

Кроме того, при таком способе используются только граничные точки множества R , среди которых, по предположению, и находится оптимальное решение.

При этом в оптимальной точке x^* , по условиям теоремы 5.1,

$$p^* = \frac{\partial \Phi(x(p^*))}{\partial x} \quad (7.3)$$

и задача состоит в том, чтобы найти такой вектор p^* , при котором выполняются соотношения (7.3) и (7.1), т. е. условия теоремы 5.1.

Таким образом, теорема 5.1 дает необходимые и достаточные условия оптимальности как для прямой задачи, так и для двойственной (в случае ее выпуклости).

§ 8. Функция Лагранжа

Изложенный в предыдущем параграфе двойственный подход к экстремальным задачам тесно связан с использованием функции Лагранжа.

Пусть множество R задается неравенствами (2.2), где $f_j(x)$ ($j=1, \dots, m$) — выпуклые вверх и дифференцируемые функции. Функция $\Phi(x)$ по-прежнему считается выпуклой вверх. Кроме того, для простоты будем считать, что множество R , выделяемое неравенствами (2.2), огра-

*) За исключением естественных и легко учитываемых ограничений: $|p| < \infty$, $p \neq 0$.

ничено и имеет внутренние точки, т. е. выполнено условие регулярности (3.3).

Определим функцию Лагранжа для исходной задачи:

$$F(x, p) = \Phi(x) + \sum_{j=1}^m p_j f_j(x) = \Phi(x) + (p, f(x)), \quad (8.1)$$

где вектор $p = \{p_1, \dots, p_m\}$ и все $p_j \geq 0$.

С помощью функции Лагранжа построим функции

$$\varphi(x) = \min_{p \geq 0} F(x, p), \quad (8.2)$$

$$\psi(p) = \max_{x \in R} F(x, p). \quad (8.3)$$

Рассмотрим задачи *).

Задача I.

$$\max_x \varphi(x) = \max_x \min_{p \geq 0} F(x, p).$$

Задача II.

$$\min_{p \geq 0} \psi(p) = \min_{p \geq 0} \max_x F(x, p).$$

Покажем, что задача I всегда (без условий выпуклости) эквивалентна исходной задаче, т. е.

$$\max_{x \in R} \Phi(x) = \max_x \min_{p \geq 0} F(x, p). \quad (8.4)$$

Действительно, из определения функций $\varphi(x)$ и $F(x, p)$ следует, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} \Phi(x) & \text{при } x \in R, \\ -\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть x^* — решение исходной задачи. Тогда, поскольку $x^* \in R$, $\Phi(x^*) = \max_{x \in R} \Phi(x) = \max_x \varphi(x)$. Если, наоборот, x^{**} — решение задачи I: $\varphi(x^{**}) = \max_x \varphi(x)$, то $x^{**} \in R$, и, следовательно, опять справедливо (8.4).

Установим теперь соотношения между задачами I и II. Прежде всего покажем, что всегда (т. е. опять без всяких

*) Более точным, как видно из дальнейшего, здесь было бы использование операторов $\sup$ и $\inf$ вместо $\max$ и $\min$.

условий выпуклости).

$$\max_x \min_{p \geq 0} F(x, p) \leq \min_{p \geq 0} \max_x F(x, p). \quad (8.5)$$

Действительно, $\min_{p \geq 0} F(x, p) \leq F(x, p)$ при любых x и $p \geq 0$. В частности, $\max_x \min_{p \geq 0} F(x, p) \leq \max_x F(x, p)$ для любых $p \geq 0$. Отсюда уже следует (8.5).

Таким образом, решая задачу II, можно получить оценку сверху для решения исходной задачи.

Потребуем теперь, чтобы исходная задача удовлетворяла сформулированным выше условиям выпуклости и регулярности Слейтера (3.3). В этом случае

$$\max_x \min_{p \geq 0} F(x, p) = \min_{p \geq 0} \max_x F(x, p) = F(x^*, p^*), \quad (8.6)$$

где x^* — оптимальное решение исходной задачи (2.1).

Для доказательства равенства (8.6) достаточно показать в силу (8.5), что

$$\max_x \min_{p \geq 0} F(x, p) \geq \min_{p \geq 0} \max_x F(x, p).$$

Для этого в $(m+1)$ -мерном пространстве Y с координатами $\{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ построим множество

$$\tilde{A} = \left\{ \tilde{y} = \{y_0, y\} \mid \begin{array}{l} y_0 \leq \Phi(x), \\ y \leq f(x), \end{array} \text{ для некоторого } x \right\},$$

где $y = \{y_1, \dots, y_m\}$, $f = \{f_1, \dots, f_m\}$, и луч

$$\tilde{B} = \left\{ \tilde{y} = \{y_0, y\} \mid \begin{array}{l} y_0 > \Phi(x^*), \\ y = 0 \end{array} \right\}.$$

Так как функции $\Phi(x)$ и $f_j(x)$ выпуклы вверх, то, очевидно, множество $\tilde{A}$ — выпуклое. Так как луч $\tilde{B}$ — также выпуклое множество, не имеющее общих точек с $\tilde{A}$, то по теореме о разделимости выпуклых множеств (§ 2.1) получим, что существует такая гиперплоскость $(\tilde{p}^*, \tilde{y}) = (\tilde{p}^*, \tilde{y}^*)$ ($\tilde{p}^* \neq 0$), что

$$\tilde{p}_0^* y_0 + (\tilde{p}^*, y) \leq \tilde{p}_0^* \Phi(x^*) \quad (8.7)$$

для любых $\tilde{y} \in \tilde{A}$. Так как множество $\tilde{A}$ содержит точки со сколь угодно малыми координатами, то неравенство

(8.7) возможно только при $p_i^* \geq 0$ ($i=0, \dots, m$). Полагая $y_0 = \Phi(x)$, $y_i = f_i(x)$, получим, что $p_0^* \Phi(x) + (p^*, f(x)) \leq p_0^* \Phi(x^*)$ для любых x . Покажем, что $p_0^* \neq 0$. Действительно, в противном случае $(p^*, f(x)) \leq 0$ для любых x , где $p^* \geq 0$, $p^* \neq 0$. Это противоречит условию регулярности Слейтера (3.3). Поэтому можно положить $p_0^* = 1$. Следовательно,

$$\Phi(x) + (p^*, f(x)) \leq \Phi(x^*)$$

для любых x . В частности,

$$\max_x [\Phi(x) + (p^*, f(x))] \leq \Phi(x^*), \text{ или } \max_x F(x, p^*) \leq \Phi(x^*).$$

$$\text{Но } \max_x F(x, p^*) \geq \min_{p \geq 0} \max_x F(x, p), \text{ а } \Phi(x^*) = \max_x \min_{p \geq 0}$$

$F(x, p)$. Равенство (8.6) доказано.

Теперь заметим, что функция Лагранжа $F(x, p)$ представляет собой линейный функционал в пространстве $\tilde{Y}$:

$$F(x, p) = p_0 \Phi(x) + (p, f(x)) = (\tilde{p}, \tilde{y}),$$

где $\tilde{p} = \{p_0, p\}$, $y_0 = \Phi(x)$, $y_j = f_j(x)$ ($j=1, \dots, m$). Так как можно положить $p_0 = 1$, то задача II сводится, следовательно, к построению опорных гиперплоскостей к множеству $\tilde{A}$:

$$\max_{\tilde{y} \in \tilde{A}} (\tilde{p}, \tilde{y}) = \psi_1(\tilde{p}) = \psi(p),$$

и нахождению среди них такой, для которой функция $\psi(p)$ минимальна. Таким образом, здесь используется тот же двойственный подход, который был изложен в § 7. Однако теперь он осуществляется уже не в исходном пространстве состояний X , а в пространстве $\tilde{Y}$ значений функций. Поэтому задачу II можно назвать задачей, *двойственной* задаче I, а обе эти задачи — *парой двойственных задач*, причем между ними всегда существует соотношение (8.5), которое переходит в равенство (8.6) в случае одноэкстремальности и регулярности исходной задачи.

Для некоторых задач функция $\psi(p)$ определяется в явном виде, и тогда можно рассматривать двойственную задачу, заданную в той же форме, что и исходная.

Рассмотрим, например, задачу линейного программирования

$$\max_x (a_0, x), \quad Ax \leq b, \quad (8.8)$$

где A — матрица размера $(n \times m)$, x — n -мерный вектор, b — m -мерный вектор (см. § 2). Для нее функция Лагранжа имеет вид

$$F(x, p) = (a_0, x) + (p, b - Ax), \quad p \geq 0; \quad p = \{p_1, \dots, p_m\},$$

и функция

$$\psi(p) = \max_x [(a_0, x) + (p, b - Ax)] = (p, b) + \max_x (a_0 - p^T A, x).$$

Предполагая, что решение двойственной задачи конечно, получим, что

$$a_0 - p^T A = 0 \quad \text{и} \quad \psi(p) = (p, b).$$

Таким образом, приходим к следующей задаче линейного программирования:

$$\min_p (p, b), \quad p^T A = a_0, \quad p \geq 0. \quad (8.9)$$

Задачи (8.8) и (8.9) являются парой двойственных задач линейного программирования, причем между ними в силу (8.6) справедливо соотношение

$$(a_0, x^*) = (p^*, b), \quad (8.10)$$

где $\{x^*, p^*\}$ образуют решение двойственных задач (8.8), (8.9).

Заметим, что если для прямой задачи линейного программирования ограничения имеют вид $Ax \leq b$, $x \geq 0$, то из этих рассуждений следует, что ограничения двойственной задачи будут симметричны ограничениям прямой: $p^T A \geq a_0$, $p \geq 0$.

Аналогично рассмотрим задачу квадратичного программирования (см. § 2):

$$\max \left[\frac{1}{2} (x, Qx) + (a_0, x) \right], \quad Ax \leq b.$$

Для нее функция Лагранжа имеет вид

$$F(x, p) = \frac{1}{2} (x, Qx) + (a_0, x) + (p, b - Ax),$$

где $p \geq 0$. Тогда из решения задачи

$$\max_x F(x, p)$$

следует, что

$$Qx + a_0 - A^T p = 0,$$

отсюда двойственная задача будет иметь вид

$$\min \left[(p, b) - \frac{1}{2} (x, Qx) \right], \quad A^T p - Qx = a_0, \quad p \geq 0.$$

Причем на оптимальном решении $\{x^*, p^*\}$ этих двойственных задач справедливо следующее равенство:

$$\frac{1}{2} (x^*, Qx^*) + (a_0, x^*) = (p^*, b) - \frac{1}{2} (x^*, Qx^*),$$

или

$$(x^*, Qx^*) + (a_0, x^*) = (p^*, b).$$

Вернемся теперь к общему случаю задач I и II. Так как функция $F(x, p^*)$ достигает максимального значения в точке x^* и так как значения переменных x в задаче II не ограничены, то в этой точке должно быть

$$\frac{\partial \Phi(x^*)}{\partial x} + \sum_{j=1}^m p_j^* \frac{\partial f_j(x^*)}{\partial x} = 0.$$

Эти условия, в силу выпуклости функций $\Phi(x)$ и $f_j(x)$, будут и достаточными для того, чтобы точка x^* доставляла максимальное значение $F(x, p^*)$. Следовательно, вместо задачи II можно в этом случае сформулировать задачу, ей эквивалентную, которая будет иметь вид

$$\min [\Phi(x) + \sum_{j=1}^m p_j f_j(x)], \quad (8.11)$$

при условиях

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} + \sum_{j=1}^m p_j \frac{\partial f_j(x)}{\partial x} = 0, \quad p_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, m). \quad (8.12)$$

Эта задача двойственна прямой задаче (2.2), и для нее на оптимальном решении $\{p^*, x^*\}$ справедливо равенство

$$(p^*, f(x^*)) = 0,$$

которое обычно называют условием *дополняющей нежесткости*.

Из этого условия следует, что если x^* не нарушает ограничения $f_j(x) \geq 0$, т. е. $f_j(x^*) > 0$ для этого j , то соответствующее $p_j^* = 0$.

Если же $p_j^* > 0$ для некоторого j , то

$$f_j(x^*) = 0.$$

Подчеркнем, что только для задач линейного программирования «прямые» переменные x не входят в формулировку двойственной задачи.

§ 9. Седловая точка и оптимальность

В § 8 было установлено, что для одноэкстремальных и регулярных задач справедливо равенство

$$\max_x \min_{p \geq 0} F(x, p) = \min_{p \geq 0} \max_x F(x, p) = F(x^*, p^*), \quad (9.1)$$

или

$$F(x, p^*) \leq F(x^*, p^*) \leq F(x^*, p) \quad (9.2)$$

для любых x и $p \geq 0$.

Если функция удовлетворяет в точке $\{x^*, p^*\}$ равенствам (9.1), или неравенствам (9.2), то говорят, что эта точка является седловой. Тогда результаты § 8 можно интерпретировать следующим образом.

Теорема 9.1. Пусть $\{x^*, p^*\}$ — седловая точка функции Лагранжа (8.1). Тогда x^* — решение исходной задачи (2.1).

Пусть, обратно, x^* — решение исходной задачи и выполнены условия одноэкстремальности и регулярности задачи (2.1). Тогда существует такой вектор $p^* \geq 0$, что $\{x^*, p^*\}$ является седловой точкой функции Лагранжа (8.1).

Таким образом, исходная задача (2.1) при условиях одноэкстремальности и регулярности может быть сведена к задаче нахождения седловой точки функции Лагранжа.

§ 10. Условия оптимальности. II.

Теорема Куна — Таккера

В § 6 были установлены необходимые условия оптимальности в терминах возможных направлений (теоремы 4.1, 4.2). Такие условия оптимальности можно назвать «прямыми». Используя понятие двойственности, можно получить необходимые условия оптимальности в «двойственной» форме, связанной с функцией Лагранжа.

В теореме 4.2 утверждалось, что если x^* — оптимальная точка и выполнены условия регулярности (3.2), то

$$\left(\frac{\partial \Phi(x^*)}{\partial x}, \delta x \right) \leq 0, \quad (10.1)$$

$$\left(\frac{\partial f_j(x^*)}{\partial x}, \delta x \right) \geq 0, \quad j \in J(x^*). \quad (10.2)$$

Положим $\delta x = x - x^*$. Тогда неравенства (10.1), (10.2) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial \Phi(x^*)}{\partial x}, x \right) \leq \left(\frac{\partial \Phi(x^*)}{\partial x}, x^* \right), \quad (10.3)$$

$$\left(\frac{\partial f_j(x^*)}{\partial x}, x \right) \geq \left(\frac{\partial f_j(x^*)}{\partial x}, x^* \right), \quad j \in J(x^*). \quad (10.4)$$

Задачу нахождения такого x , который удовлетворяет неравенству (10.3) при ограничениях (10.4), можно сформулировать, очевидно, как экстремальную, в виде

$$\max \left(\frac{\partial \Phi(x^*)}{\partial x}, x \right) = \left(\frac{\partial \Phi(x^*)}{\partial x}, x^* \right) \quad (10.5)$$

при

$$\left(\frac{\partial f_j(x^*)}{\partial x}, x \right) \geq \left(\frac{\partial f_j(x^*)}{\partial x}, x^* \right), \quad j \in J(x^*). \quad (10.6)$$

Это — задача линейного программирования.

Переходя от задачи (10.5), (10.6) к задаче, ей двойственной (см. (8.8, 8.9)), получим задачу: найти $p_j \geq 0$, $j \in J(x^*)$, которые минимизируют

$$- \sum_{j \in J(x^*)} p_j \left(\frac{\partial f_j(x^*)}{\partial x}, x^* \right) \quad (10.7)$$

при ограничениях

$$-\sum_{j \in J(x^*)} p_j \frac{\partial f_j(x^*)}{\partial x} = \frac{\partial \Phi(x^*)}{\partial x}, \quad p_j \geq 0; j \in J(x^*). \quad (10.8)$$

Заметим, что при оптимальном p_j^* должно быть, на основании (8.10), равенство

$$-\sum_{j \in J(x^*)} p_j^* \left(\frac{\partial f_j(x^*)}{\partial x}, x^* \right) = \left(\frac{\partial \Phi(x^*)}{\partial x}, x^* \right),$$

что является следствием (10.8).

Таким образом, если x^* — оптимальное решение исходной задачи, то должны существовать такие неотрицательные множители p_j^* , $j \in J(x^*)$, при которых выполнено (10.8). Равенство (10.8) имеет простой геометрический смысл: в оптимальной точке x^* градиент $\frac{\partial \Phi(x^*)}{\partial x}$ показате-

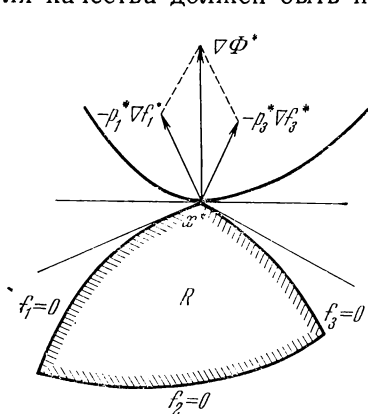


Рис. 2.10.1.

бинацией градиентов $\frac{\partial f_j(x^*)}{\partial x}$

тех ограничений, которые в оптимальной точке выполняются как равенства:

$$f_j(x^*) = 0, \quad j \in J(x^*)$$

(см. рис. 2.10.1, где $f_1(x^*) = f_3(x^*) = 0$, $f_2(x^*) > 0$, $J(x^*) = \{1, 3\}$, $\nabla \Phi^* = \frac{\partial \Phi(x^*)}{\partial x}$

$$p_i^* \nabla f_i^* = p_i^* \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x} \quad (i = 1, 3)).$$

Заметим, что отсюда видно, что вместо условия (3.2) достаточно потребовать, чтобы векторы

$\frac{\partial f_j(x^*)}{\partial x}; j \in J(x^*)$, в оптимальной точке были линейно независимы.

Введем вектор $p = \{p_1, \dots, p_m\}$ с неотрицательными компонентами, причем будем считать, что $p_j = 0$, если $j \notin J(x)$, т. е. если соответствующее ограничение не влияет на точку x : $f_j(x) \geq 0$ для этих j .

Тогда равенство (10.8) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} + \sum_{j=1}^m p_j \frac{\partial f_j(x)}{\partial x} = 0, \quad (10.9)$$

где

$$(p, f(x)) = 0, \quad p_j \geq 0, \quad f_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, m). \quad (10.10)$$

Таким образом, приходим к следующим необходимым условиям оптимальности.

Теорема 10.1 (Куна — Таккера). Пусть x^* — оптимальное решение задачи (2.1) и пусть в оптимальной точке выполнено условие (3.2), либо в этой точке векторы $\frac{\partial f_j(x^*)}{\partial x}$, $j \in J(x^*)$, линейно независимы. Тогда существует такой вектор $p^* \geq 0$, что для x^* , p^* выполнены соотношения (10.9), (10.10).

Теперь заметим, что если использовать функцию Лагранжа $F(x, p) = \Phi(x) + (p, f(x))$, то условия (10.9), (10.10) заменяются на следующие. В оптимальной точке x^* существует такой вектор $p^* \geq 0$, что

$$\frac{\partial F(x^*, p^*)}{\partial x} = 0, \quad (10.11)$$

$$\frac{\partial F(x^*, p^*)}{\partial p} = f(x^*) \geq 0, \quad (10.12)$$

$$(p^*, f(x^*)) = 0, \quad p^* \geq 0. \quad (10.13)$$

Таким образом, теорема Куна — Таккера обобщает метод Лагранжа на случай ограничений, заданных в форме неравенств.

Заметим, что условия (10.11) — (10.13) (или (10.9) — (10.10)) являются также и необходимыми условиями того, чтобы $\{x^*, p^*\}$ была седловой точкой функции Лагранжа $F(x, p)$ при $p \geq 0$. Если для исходной задачи (2.1) потребовать условия одноэкстремальности и регулярности, то теорема Куна — Таккера дает, очевидно, и достаточные условия оптимальности.

§ 11. Вычислительные методы. Классификация

Перейдем теперь к методам вычисления оптимального значения x^* . В соответствии с полученными условиями оптимальности для нахождения оптимального x^* имеются три (основные) возможности.

1. Решать исходную задачу (2.1), выбирая сначала произвольное $x \in R$ и улучшая его в соответствии с условиями теоремы 4.1. Такие методы дают монотонное улучшение допустимого решения x (не нарушающего ограничения) и приводят при некоторых дополнительных условиях, во всяком случае, к локальному максимуму $\Phi(x)$ на R . Они получили название прямых (градиентных) методов или *методов возможных направлений*.

2. Заменить исходную задачу, её двойственной (задачей (7.2)) или задачей (8.11), (8.12), или задачей II § 8), и решать двойственную задачу. Часто такая замена существенно упрощает решение (например, двойственная задача может распадаться на ряд подзадач). Однако такая замена возможна лишь в случае одноэкстремальности и регулярности исходной задачи. В общем же случае решение двойственной задачи дает только оценку сверху для решения исходной задачи в соответствии с (8.5).

3. Воспользоваться условиями оптимальности теоремы 10.1 и искать такие значения x^* и p^* , при которых функция Лагранжа удовлетворяет условиям (10.9), (10.10). Для одноэкстремальных и регулярных задач этот метод приводит к определению седловой точки функции Лагранжа и дает одновременное решение прямой и двойственной задач.

Не ставя здесь целью подробное изучение всех трех групп приведенных методов, рассмотрим в последующих параграфах только их основные черты. Но прежде получим оценку близости произвольного решения $\bar{x} \in R$ к оптимальному x^* .

§ 12. Оценка приближения

Оптимальное значение функционала в задаче (2.1) можно оценить сверху, решая точно или приближенно двойственную задачу. Именно,

$$\Phi(\bar{x}) \leq \max_{x \in R} \Phi(x) \leq \max_x [\Phi(x) + (\bar{p}, f(x))], \quad (12.1)$$

где $\bar{x} \in R$ — любое допустимое решение прямой задачи, $\bar{p} \geq 0$ — любое допустимое решение двойственной задачи. В случае одноэкстремальности задачи (2.1) при $\bar{x} \rightarrow x^*$, $\bar{p} \rightarrow p^*$, где x^* , p^* — оптимальное решение прямой и двой-

ственной задач, разность между верхней и нижней оценкой в неравенствах (12.1) будет стремиться к нулю. Таким образом, одновременное решение прямой и двойственных задач позволяет последовательно уточнять диапазон, в котором находится оптимальное значение функционала прямой задачи. Однако такой способ обладает тем недостатком, что оценка сверху не зависит от конкретного выбора $\tilde{x}$. В связи с этим воспользуемся той же идеей двойственности в несколько ином плане (см. § 7).

Будем рассматривать одноэкстремальные задачи. Выберем в расширенном пространстве E^{n+1} вектор $\tilde{p} = \{p_0, p\}$, где $p_0 = -1$, $p \in E^n$, — произвольный вектор ($p \neq 0$), и решим задачу

$$\max_{\tilde{x} \in \tilde{R}} (\tilde{p}, \tilde{x}),$$

где множество $\tilde{R}$ определено из (2.4), $\tilde{x} \in E^{n+1}$.

Пусть $\tilde{x}(\tilde{p})$ — некоторое решение этой задачи, т. е.

$$(\tilde{p}, \tilde{x}(\tilde{p})) \leq (\tilde{p}, \tilde{x}) \quad (12.2)$$

для любых $\tilde{x} \in \tilde{R}$. Гиперплоскость $(\tilde{p}, \tilde{x}) = (\tilde{p}, \tilde{x}(\tilde{p}))$ является опорной гиперплоскостью множества $\tilde{R}$ в точке $\tilde{x}(\tilde{p})$. Так как функция $\Phi(x)$ выпукла, то все точки поверхности $x_0 = \Phi(x)$ лежат под этой гиперплоскостью (рис. 2.12.1). Следовательно, из (12.2) получим неравенство

$$\begin{aligned} -\Phi(x(p)) + (p, x(p)) &\leq \\ &\leq -\Phi(x) + (p, x), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Phi(x) - \Phi(x(p)) &\leq \\ &\leq (p, x - x(p)), \quad (12.3) \end{aligned}$$

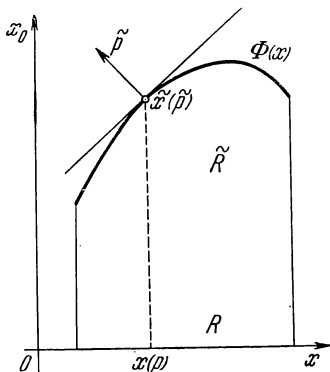


Рис. 2.12.1.

справедливое для любых $x \in R$. Причем, если функция $\Phi(x)$ дифференцируема, то, очевидно,

$$p = \frac{\partial \Phi(x(p))}{\partial x}. \quad (12.4)$$

Воспользуемся неравенством (12.3) для получения оценки близости произвольного $\bar{x} \in R$ к оптимальному. Выберем произвольный вектор $\bar{x} \in R$ и положим $\bar{p} = \partial\Phi(\bar{x})/\partial x$. Неравенство (12.3) переписывается тогда следующим образом:

$$\Phi(x) - \Phi(\bar{x}) \leq (\bar{p}, x - \bar{x}) \quad (12.5)$$

для любых $x \in R$. В частности,

$$\max_{x \in R} \Phi(x) \leq \Phi(\bar{x}) + \max_{x \in R} (\bar{p}, x - \bar{x}). \quad (12.6)$$

Таким образом, выбирая произвольный вектор $\bar{x} \in R$, получим из (12.6) оценку сверху оптимального значения функционала $\Phi(x)$. Эта оценка тем точнее, чем ближе $\bar{x}$ к x^* . При $\bar{x} = x^*$ получим в силу теоремы 5.1, что

$$\max_{x \in R} (p^*, x - x^*) = 0,$$

и неравенство (12.6) переходит в равенство. Далее, применяя неравенство (12.5) к функциям $f_j(x)$ ($j=1, \dots, m$), получим, что

$$f_j(x) - f_j(\bar{x}) \leq (q_j(\bar{x}), x - \bar{x}) \quad (j=1, \dots, m), \quad (12.7)$$

где $\bar{x} \in R$, а $q_j(\bar{x}) = \partial f_j(\bar{x})/\partial x$.

Если $x \in R$, то $f_j(x) \geq 0$, и из (12.7) получим, что

$$\left(\frac{\partial f_j(\bar{x})}{\partial x}, x \right) \geq \left(\frac{\partial f_j(\bar{x})}{\partial x}, \bar{x} \right) - f_j(\bar{x}) \quad (j=1, \dots, m). \quad (12.8)$$

Пусть $\bar{x}$ — граничная точка R . Определим множество индексов $J(\bar{x}) = \{j | j=1, \dots, m; f_j(\bar{x}) = 0\}$. Для $j \in J(\bar{x})$ неравенства (12.8) определяют конус $C(\bar{x})$ (см. § 3). Он ограничен еще гиперплоскостями (12.8) при $j \notin J(\bar{x})$, т. е. когда $f_j(x) \neq 0$. Получающееся в результате выпуклое многогранное множество, которое обозначим через $Q(\bar{x})$, содержит, очевидно, R . Поэтому из (12.6) получим вторую оценку

$$\max_{x \in R} \Phi(x) \leq \Phi(\bar{x}) + \max_{x \in Q(\bar{x})} (\bar{p}, x - \bar{x}). \quad (12.9)$$

Заметим, что задача максимизации в правой части

(12.9) — задача линейного программирования. Опять, если x^* — оптимальное решение задачи (2.1), то $\max_{x \in Q(x^*)} (p^*, x - x^*) = 0$, и неравенство (12.9) переходит в равенство.

Эти построения проиллюстрированы для одномерного случая на рис. 2.12.2. Здесь функции $x_0 = f_1(x)$, $x_0 = f_2(x)$

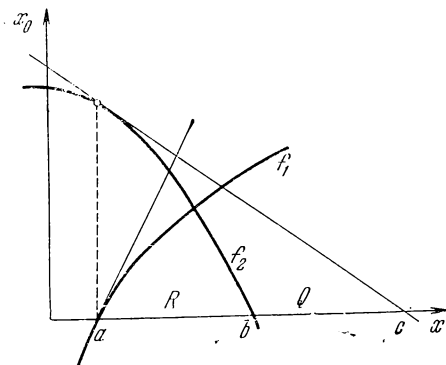


Рис. 2.12.2.

задают допустимое множество R на оси x (интервал $[a, b]$) из условия $f_1(x) \geq 0$, $f_2(x) \geq 0$.

В силу выпуклости функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ для них справедливы очевидные неравенства (12.7) и (12.8), которые определяют «линейную аппроксимацию множества R » — интервал $Q = [a, c]$.

§ 13. Методы возможных направлений

Реализация этих методов состоит из следующих этапов:

- 1) выбор начальной допустимой точки $x^1 \in R$;
- 2) выбор подходящего допустимого направления s^1 ;
- 3) выбор длины шага ε^1 вдоль s^1 ;
- 4) получение нового решения $x^2 = x^1 + \varepsilon^1 s^1$;
- 5) оценка нового решения x^2 и т. д.

Достоинство методов возможных направлений состоит в том, что на каждой итерации получаются допустимые решения ($x^2 \in R$) и при этом новое решение лучше предыдущего $\Phi(x^2) > \Phi(x^1)$.

Опишем кратко каждый из этапов в отдельности.

1) Выбор допустимой точки $x \in R$. Во многих практических задачах такую точку легко получить из физических соображений. Если же она неизвестна, возьмем произвольную точку $x \in E^n$ (например, $x=0$) и решим задачу

$$\max \zeta \quad (13.1)$$

при ограничениях

$$f_j(x) \geq \zeta \quad (j=1, \dots, m). \quad (13.2)$$

Так как множество R , выделяемое неравенствами (2.2), содержит, по предположению (3.3), внутренние точки, то $\max \zeta > 0$. Следовательно, решая задачу (13.1), (13.2) каким-либо излагаемым далее методом возможных направлений, всегда можно получить после конечного числа шагов точку $\bar{x} = x^1$, для которой $f_j(\bar{x}) \geq \zeta \geq 0$ ($j=1, \dots, m$), т. е. $\bar{x} \in R$.

2) Выбор подходящего направления s . Пусть $x^1 \in R$. Определим в этой точке конус допустимых вариаций $K(x^1)$ и решим задачу

$$\max_s \left(\frac{\partial \Phi(x^1)}{\partial x}, s \right)$$

при условиях, что вектор s нормализован и $s \in K(x^1)$.

Нормализация нужна для того, чтобы избежать неограниченных решений задачи. Например, можно потребовать, чтобы

$$|s_i| \leq \rho_i, \quad \rho_i > 0,$$

или

$$(s, s) \leq \rho, \quad \rho > 0.$$

Решая эту задачу получим, очевидно, такое направление s^1 , которое обеспечивает наибольшее возрастание функции $\Phi(x)$ среди всех допустимых направлений в этой точке.

Предполагая выполненными условия регулярности § 3, конус $K(x)$ можно задать с помощью неравенств (3.1). Кроме того, желательно в задачу выбора оптимального направления s^1 ввести некоторые параметры, регулирующие «степень проникновения» вектора s^1 в множество R .

Задавая конус $K(x^1)$ с помощью неравенств (3.1), приходим к следующей задаче:

$$\begin{aligned} & \max \sigma, \\ & \left(\frac{\partial \Phi(x^1)}{\partial x}, s \right) - \sigma \geq 0, \\ & \left(\frac{\partial f_j(x^1)}{\partial x}, s \right) - \theta_j \sigma \geq 0, \quad \theta_j > 0, \quad j \in J(x^1), \\ & \rho_i - |s_i| \geq 0 \quad (i=1, \dots, m). \end{aligned} \quad (13.3)$$

Коэффициенты θ_j нужны для того, чтобы избежать направлений, «строгих» касательных к поверхностям $f_j(x)=0, j \in J(x^1)$, и тем самым для того, чтобы не выходить за пределы множества R . Величины ρ_i определяют нормализацию вектора s . Она необходима для того, чтобы не получать неограниченных решений задачи (13.3). Возможны и другие виды нормализации вектора s . При этом выбор нормализации существенно влияет на свойства алгоритма.

Очевидно, (13.3) — задача линейного программирования. Таким образом, выбор наилучшего возможного направления можно свести к решению некоторой, часто простой, задачи линейного программирования.

Выбор длины шага ε . Пусть s^1, σ^1 — решение задачи (13.3). Определим сначала наибольшую длину шага ε^{11} , которую можно сделать вдоль направления s^1 . Для этого решим задачу:

$$\varepsilon^{11} = \max_{\varepsilon} \{ \varepsilon | x^1 + \varepsilon s^1 \in R \} \quad \text{или} \quad \max \varepsilon = \varepsilon^{11}$$

при ограничениях $f_j(x^1 + \varepsilon s^1) \geq 0 \quad (j=1, \dots, m)$.

В силу выбора направления s^1 величина $\varepsilon^{11} > 0$. Теперь определим наилучшую возможную длину шага ε^1 вдоль направления s^1 . Для этого решим задачу

$$\max_{\varepsilon} \Phi(x^1 + \varepsilon s^1) = \Phi(x^1 + \varepsilon^{12} s^1). \quad (13.4)$$

Задача (13.4) одномерная. Необходимые условия оптимальности для нее

$$\frac{\partial \Phi(x^1 + \varepsilon s^1)}{\partial \varepsilon} = 0, \quad (13.5)$$

которые будут и достаточными, если функция $\Phi(x)$ выпукла вверх. Если $\Phi(x)$ не выпукла, то в качестве прибли-

женного решения (13.4) можно взять первый положительный корень (13.5), который даст во всяком случае локальный максимум задачи (13.4).

Заметим, что часто для определения длины шага используют представление $\Phi(x)$ вблизи точки x^1 в виде

$$\Phi(x^1 + \varepsilon s^1) = \Phi(x^1) + \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi(x^1)}{\partial x}, s^1 \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(s^1, \frac{\partial^2 \Phi(x^1)}{\partial x^2} s^1 \right) + o(\varepsilon^2),$$

где матрица

$$\frac{\partial^2 \Phi(x^1)}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 \Phi(x^1)}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

откуда

$$\varepsilon^{12} = - \left(s^1, \frac{\partial^2 \Phi(x^1)}{\partial x^2} s^1 \right)^{-1} \left(\frac{\partial \Phi(x^1)}{\partial x}, s^1 \right).$$

После того как ε^{12} определено, в качестве длины шага ε^1 выбираем наименьшее из чисел ε^{11} и ε^{12} :

$$\varepsilon^1 = \min \{ \varepsilon^{11}, \varepsilon^{12} \}.$$

4) Оценка полученного решения. Для оценки $x^2 = x^1 + \varepsilon^1 s^1$ можно воспользоваться либо оценками приближения, приведенными в § 12, либо просто, если $\Phi(x^2) - \Phi(x^1) < \delta$, где $\delta > 0$ — заранее заданное малое число, то считать, что x^2 с некоторой точностью (зависящей от δ) определяет локальный экстремум $\Phi(x)$ на R .

Практически этот экстремум может быть только максимумом (глобальным или локальным), потому что к минимуму $\Phi(x)$ нельзя прийти из-за монотонного возрастания $\Phi(x^v)$ ($v = 1, 2, \dots$), что касается стационарных точек типа седловой, то для них всегда можно найти подходящую (хотя бы в широком смысле слова) вариацию, в направлении которой функция $\Phi(x)$ возрастает.

В заключение отметим, что этот метод дает широкие возможности в построении конкретных алгоритмов, которые отличаются выбором направления, длины шага или нормализации, причем в эту схему укладываются такие известные и эффективные методы математического программирования, как конечные методы в линейном программировании, метод проекций градиента в нелинейном программировании и т. п.

§ 14. Ограничения в виде равенств

Если ограничения заданы в виде равенств, например, допустимое множество представляет собой некоторую гиперповерхность в E^n , то здесь в качестве допустимых линейных вариаций можно выбирать только такие, которые направлены по касательной к этой поверхности, т. е. в качестве аппроксимации множества R в точке x нужно использовать конус $M(x)$, а не $K(x)$ (см. § 3). С этим уточнением методы возможных направлений могут быть использованы и в рассматриваемом случае.

Рассмотрим, для примера, задачу максимизации функции $\Phi(x)$ при одном ограничении

$$f(x) = 0. \quad (14.1)$$

Конус $M(x^1)$ допустимых в широком смысле вариаций в точке x^1 в этом случае образует гиперплоскость

$$\left(\frac{\partial f(x^1)}{\partial x}, \delta x \right) = 0, \quad (14.2)$$

касательную к поверхности (14.1) в этой точке. (Предполагаем, что $\frac{\partial f(x^1)}{\partial x} \neq 0$.)

Задача выбора наилучшей вариации в точке x^1 сводится к задаче максимизации линейной функции $\left(\frac{\partial \Phi(x^1)}{\partial x}, \delta x \right)$ при ограничениях (14.2) и при условии нормализации вектора δx , например, вида $(\delta x, \delta x) = 1$ (без этого условия задача имела бы, очевидно, неограниченное решение). Поскольку ограничения для этой задачи заданы только в виде равенств, для ее решения используем классический метод Лагранжа. В данном случае он сводится к отысканию стационарной точки функции Лагранжа вида

$$\left(\frac{\partial \Phi(x^1)}{\partial x}, \delta x \right) + \lambda \left(\frac{\partial f(x^1)}{\partial x}, \delta x \right) + \lambda_0 [1 - (\delta x, \delta x)].$$

Дифференцируя функцию Лагранжа по вектору δx , получим, что наилучшее направление определяется выражением

$$\delta x = \frac{\partial \Phi(x^1)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f(x^1)}{\partial x}. \quad (14.3)$$

Так как вектор δx должен удовлетворять уравнению (14.2), то из (14.2), (14.3) получим условие для λ :

$$\lambda^1 = - \left(\frac{\partial f(x^1)}{\partial x}, \frac{\partial f(x^1)}{\partial x} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \Phi(x^1)}{\partial x}, \frac{\partial f(x^1)}{\partial x} \right). \quad (14.4)$$

Таким образом, новая точка x^2 определяется из

$$x^2 = x^1 + \varepsilon \delta x^1,$$

где δx^1 находится из (14.3), (14.4), а ε — длина шага, которая может считаться здесь постоянной.

Заметим, что точка x^2 уже не удовлетворяет точно ограничению (14.1) (если функция $f(x)$ нелинейна), поэтому в алгоритме должен быть еще и механизм, возвращающий точку (после одной или нескольких итераций) на поверхность (14.1).

В заключение подчеркнем, что если в рассматриваемой задаче оптимизации ограничения заданы в виде равенств

$$f_j(x) = 0 \quad (j=1, \dots, m < n), \quad (14.5)$$

то для одноэкстремальности задачи и справедливости теорем двойственности необходимо требование линейности функций $f_j(x)$ ($j=1, \dots, m$). Это связано с тем, что допустимое множество R , определяемое ограничениями (14.5), будет выпуклым только при выполнении последнего условия.

§ 15. Двойственные методы

Вид двойственных методов существенно зависит от того, в каком пространстве применяется принцип двойственности.

1. Если он используется в пространстве решений X , то метод определения оптимального значения x^* следует непосредственно из самой идеи двойственности (§ 7).

Действительно, выберем произвольный вектор $p^1 \neq 0$ и решим задачу

$$\max_{x \in R} (p^1, x). \quad (15.1)$$

Пусть $x(p^1)$ — некоторое решение этой задачи. Если

$$\frac{\partial \Phi(x(p^1))}{\partial x} = p^1, \quad (15.2)$$

то, на основании теоремы 6.1, $x^1 = x(p^1)$ — решение задачи. Если же равенство (15.2) не справедливо, то положим

$$p^2 = p^1 + \varepsilon^1 \left(\frac{\partial \Phi(x(p^1))}{\partial x} - p^1 \right)$$

и решим задачу (15.1) для $p = p^2$ и т. д.

Таким образом, исходная задача заменяется, по существу, задачей минимизации рассогласования

$$\min_p \left(\frac{\partial \Phi(x(p))}{\partial x} - p, \frac{\partial \Phi(x(p))}{\partial x} - p \right), \quad (15.3)$$

где $x(p)$ определяется из решения задачи (15.1). Поскольку функция $x(p)$, как правило, в явном виде неизвестна, различные методы, основанные на этой схеме, используют либо аппроксимацию задач (15.3), (15.1), либо приближенное вычисление функции рассогласования или ее градиента по значениям $x(p)$ в нескольких точках.

Ясно, что подобными методами можно эффективно пользоваться только в случае, если выполнены условия § 7, т. е. во всяком случае множество R должно быть выпуклым.

Изложенный выше метод можно применить и для оптимизации непрерывных, но не обязательно дифференцируемых функций $\Phi(x)$.

Для этого введем понятие обобщенного градиента. Заметим сначала, что если функция $\Phi(x)$ дифференцируема и выпукла вверх, то гиперплоскость (в пространстве E^{n+1}), касательная к поверхности $x_0 = \Phi(x)$ в точке $x^1 \in R$, будет одновременно и опорной множеством $\tilde{R} = \{ \{x_0, x\} \mid x_0 \leq \Phi(x), x \in R \}$ в этой точке, т. е.

$$\max_{\tilde{x} \in \tilde{R}} (\tilde{p}^1, \tilde{x}) = (\tilde{p}^1, \tilde{x}^1), \quad (15.4)$$

где

$$\tilde{p}^1 = \{1, -p^1\}, \quad p^1 = \partial \Phi(x^1) / \partial x,$$

или

$$\Phi(x) - \Phi(x^1) \leq (p^1, x - x^1). \quad (15.5)$$

В случае недифференцируемости выпуклой вверх функции $\Phi(x)$ касательную гиперплоскость уже определить нельзя, а ее аналогом служит опорная гиперплос-

кость (15.4), определяемая неравенством (15.5). Аналогом же градиента функции $\Phi(x)$ в точке x^1 служит вектор p^1 , удовлетворяющий неравенству (15.5); его обычно называют

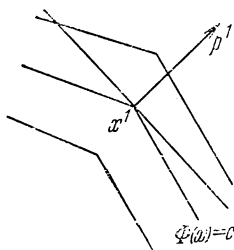


Рис. 2.15.1.

обобщенным градиентом в точке x^1 . Заметим, что для негладких функций обобщенный градиент может быть неединственным (рис. 2.15.1).

Обобщение рассмотренного метода на случай негладких функций $\Phi(x)$ состоит в следующем. Выбирается некоторый вектор p^1 , и для $p = p^1$ решается задача (15.1). Пусть x^1 — решение (15.1). Если x^1 и p^1 удовлетворяют неравенству (15.5), то нетрудно видеть, что x^1 — оптимальное решение; если при этих x^1 и p^1 неравенство (15.5) несправедливо, то ищется новое значение вектора x^2 и т. д. Таким образом, здесь ищется гиперплоскость, которая была бы одновременно опорной множествам R и $Q = \{x | \Phi(x) \leq \Phi(x^*)\}$, т. е. чтобы она разделяла эти множества.

2. Перейдем теперь к методам двойственности в пространстве $\tilde{Y} \subseteq E^{m+1}$ значений функций $y_0 = \Phi(x)$, $y_j = f_j(x)$ ($j = 1, \dots, m$).

В этом случае, если выполнены условия § 8, то исходную задачу (2.1), (2.2) можно заменить задачей минимизации

$$\min_{p \geq 0} \psi(p),$$

где

$$\psi(p) = \max_x [\Phi(x) + (p, f(x))]. \quad (15.6)$$

Пусть $x(p)$ — решение задачи (15.6). Будем предполагать, что задача (15.6) имеет при каждом p единственное решение и функция $x(p)$ дифференцируема (например, $\Phi(x)$ и $f(x)$ — строго выпуклые вверх и гладкие функции).

Тогда из (15.6) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(p)}{\partial p_j} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(x(p))}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(p)}{\partial p_j} + \\ &+ \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n p_k \frac{\partial f_k(x(p))}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(p)}{\partial p_j} + f_j(x(p)) \quad (j = 1, \dots, m). \end{aligned} \quad (15.7)$$

Но

$$\frac{\partial \Phi(x(p))}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^m p_k \frac{\partial f_k(x(p))}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (15.8)$$

по определению $x(p)$.

Поэтому из (15.7) следует, что

$$\frac{\partial \psi(p)}{\partial p_j} = f_j(x(p)) \quad (j = 1, \dots, m). \quad (15.9)$$

Применяя для решения задачи (15.6) обычный градиентный метод и учитывая, что $p \geq 0$, получим

$$p^{v+1} = p^v - \varepsilon^v \begin{cases} f(x(p^v)), & \text{если } p^v - \varepsilon^v f(x(p^v)) > 0, \\ 0, & \text{если } p^v - \varepsilon^v f(x(p^v)) \leq 0 \end{cases} \quad (v = 1, 2, 3, \dots).$$

Или, сокращенно,

$$p^{v+1} = p^v - \max\{0, p^v - \varepsilon^v f(x(p^v))\}, \quad (15.10)$$

где $x(p)$ — решение задачи (15.6), определяемое из условий (15.8); вектор-функция $f(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$.

Используя (15.10), найдем значения p^* и $x^* = x(p^*)$, которые вследствие теорем § 8 и определяют решение прямой и двойственной задачи.

Если задача (15.6) имеет неединственное решение, то функция $\psi(p)$ будет уже не дифференцируемой. Воспользуемся в этом случае понятием обобщенного градиента q функции $\psi(p)$. Нетрудно видеть, что $\psi(p)$ — выпуклая вниз функция (даже если $\Phi(x)$ и $f(x)$ невыпуклы), поэтому обобщенный градиент q^1 функции $\psi(p)$ в точке p^1 должен удовлетворять неравенству

$$\psi(p) - \psi(p^1) \geq (q^1, p - p^1).$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \Phi(x(p)) + (p, f(x(p))) \geq \Phi(x(p^1)) + (p, f(x(p^1))), \\ \psi(p^1) &= \Phi(x(p^1)) + (p^1, f(x(p^1))). \end{aligned}$$

Вычитая почленно, получим

$$\psi(p) - \psi(p^1) \geq (f(x(p^1)), p - p^1).$$

Следовательно, обобщенным градиентом q^1 функции $\psi(p)$ в точке p^1 является вектор $q^1 = f(x(p^1))$ (где $x(p^1)$ — любое решение задачи (15.6) или (15.8)), который, естественно, переходит в обычный градиент (15.9), если решение (15.6) единственно.

Обозначим через $Q(p)$ множество обобщенных градиентов $\psi(p)$ в точке p . Очевидно, для того чтобы в алгоритме (15.10) сохранить монотонное убывание функции $\psi(p)$, нужно из точки p^v двигаться в направлении — s^v , при котором $(q^v, s^v) > 0$ для всех $q^v \in Q(p^v)$, т. е. алгоритм (15.10) заменяется на

$$p^{v+1} = \max\{0, p^v - \varepsilon^v s^v\}, \quad (15.11)$$

где должно быть

$$(f(x(p^v)), s^v) > 0 \quad (15.12)$$

для всех решений $x(p^v)$ задачи (15.6) при $p = p^v$.

Можно использовать и алгоритм (15.10), где $f(x(p^v))$ — произвольное решение задачи (15.6). Однако так как неравенство (15.12) может и не выполняться для некоторых s^v в этом случае, то алгоритм (15.10) уже не будет давать монотонное уменьшение $\psi(p)$. Кроме того, можно показать, что для обеспечения сходимости последовательности p^v ($v=1, 2, \dots$) к оптимальному значению p^* нужно потребовать, чтобы длина шага ε^v уменьшалась по закону

$$\varepsilon^v \rightarrow 0, \quad \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v = \infty. \quad (15.13)$$

Двойственные методы удобно применять, когда решение задач (15.1) или (15.6) относительно легко. Однако основное достоинство этих методов состоит в том, что при специальной «блочной» структуре исходной задачи двойственная задача распадается на ряд подзадач, связанных между собой простым образом.

Рассмотрим, например, задачу максимизации суммы

$$\sum_{k=1}^N \Phi_k(x(k)) \quad (15.14)$$

при условиях

$$\sum_{k=1}^N f_{jk}(x(k)) \geq 0 \quad (j = 1, \dots, m(k)), \quad (15.15)$$

где $\Phi_k(x)$, $f_{jh}(x)$ ($j=1, \dots, m(k)$; $k=1, \dots, N$) — выпуклые вверх и дифференцируемые функции, $x(k) = \{x_1(k), \dots, x_n(k)\}$. Кроме того, предполагаются выполненными условия регулярности (3.3). Тогда решение задачи (15.14), (15.15) может быть заменено решением двойственной

$$\min_{p \geq 0} \psi(p),$$

где

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \max_{x(1)} \dots \max_{x(N)} \left[\sum_{k=1}^N \Phi_k(x(k)) + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{m(k)} p_j f_{jk}(x(k)) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^N \max_{x(k)} \left[\Phi_k(x(k)) + \sum_{j=1}^{m(k)} p_j f_{jk}(x(k)) \right]. \end{aligned} \quad (15.16)$$

Таким образом, решение двойственной задачи сводится к решению для различных p N задач (15.16) и изменению p с помощью (15.10).

В динамических задачах, которым посвящены остальные главы книги, принцип декомпозиции, основанный на теории двойственности, играет центральную роль и позволяет сводить в большинстве случаев вычисление оптимального управления к решению на каждом шаге относительно простой экстремальной задачи.

§ 16. Методы одновременного решения прямой и двойственной задач

В §§ 13—15 использовалось приближение к оптимальному решению либо по переменным x , либо по переменным p .

В этом параграфе рассмотрим методы, использующие одновременное приближение по x и p .

1. Применим опять принцип двойственности в пространстве X и рассмотрим следующий алгоритм. Выберем некоторую точку $x^1 \in R$ и вычислим градиент в этой точке

$$p^1 = \frac{\partial \Phi(x^1)}{\partial x}. \quad (16.1)$$

Для $p=p^1$ решим задачу (15.1). Пусть $x(p^1)$ — решение

этой задачи. Новое значение x^2 определим из

$$x^2 = x^1 + \lambda(x(p^1) - x^1), \quad (16.2)$$

где длину шага можно находить, например, из условия максимума по λ функции $\Phi[x^1 + \lambda(x(p^1) - x^1)]$ на отрезке, соединяющем точки $x(p^1)$ и x^1 , т. е. когда $0 \leq \lambda \leq 1$.

Заметим, что, как следует из § 11, для любых двух точек x и x^1 из X справедливо неравенство

$$\Phi(x) - \Phi(x^1) \leq (p^1, x - x^1), \quad (16.2)$$

где p^1 определено из (16.1). Следовательно,

$$\max_{x \in R} [\Phi(x) - \Phi(x^1)] \leq \max_{x \in R} (p^1, x - x^1). \quad (16.3)$$

С другой стороны, разлагая $\Phi(x)$ в окрестности точки x^1 , получим

$$\Phi(x) - \Phi(x^1) = (p^1, x - x^1) + o(|x - x^1|).$$

Таким образом, этот метод может также рассматриваться и как метод возможных направлений, где направление $s^1 = x(p^1) - x^1$ выбирается из условия максимизации приращения функции $\Phi(x)$ при специальной его нормализации: $x(p^1) \in R$.

Заметим, что из (16.1), (16.2) легко вычислить оценку (16.3) для оптимального значения $\Phi(x^*)$. Отсюда же нетрудно получить и обоснование алгоритма.

2. Используем теперь принцип двойственности в пространстве Y . В этом случае решение пары двойственных задач эквивалентно нахождению седловой точки функции Лагранжа $F(x, p)$ в области $x \in E^n$, $p \geq 0$ (см. § 9), т. е.

$$\max_x F(x, p^*) = F(x^*, p^*), \quad (16.4)$$

$$\min_{p \geq 0} F(x^*, p) = F(x^*, p^*). \quad (16.5)$$

Применяя к задачам (16.4), (16.5) градиентный алгоритм, получим

$$\begin{aligned} x^{v+1} &= x^v + \varepsilon^v \frac{\partial F(x^v, p^v)}{\partial x}, \\ p^{v+1} &= \max \left\{ 0, p^v - \varepsilon^v \frac{\partial F(x^v, p^v)}{\partial p} \right\}, \end{aligned} \quad (16.6)$$

где

$$\frac{\partial F(x^v, p^v)}{\partial x} = \frac{\partial \Phi(x^v)}{\partial x} + \left[\frac{\partial f(x^v)}{\partial x} \right]^T p^v, \quad \frac{\partial F(x^v, p^v)}{\partial p^v} = f(x^v).$$

Таким образом, здесь, в отличие от алгоритма (15.10), уже не нужно решать задачу (15.6) на каждом шаге — она решается параллельно с решением задачи (15.5) с помощью первого алгоритма (16.6).

Заметим, что седловая точка обладает определенного рода неустойчивостью, поэтому нужны специальные приемы для выбора длины шага ε^v , чтобы обеспечить сходимость алгоритма.

В заключение подчеркнем, что четкое деление методов на рассмотренные выше три группы возможно только для задач линейного программирования, так как именно в линейном случае удастся полностью исключить прямые переменные из формулировки двойственной задачи. В нелинейном же случае вычислительные методы делятся, скорее, на две основные группы: прямые, в которой улучшается допустимое решение, и различного рода двойственные, в которых при приближении к оптимуму какие-то ограничения не выполняются и в которых тем или иным способом участвуют множители Лагранжа, определяя «штраф» за невыполнение этих ограничений.

В этой главе даются необходимые условия оптимальности для задач дискретного управления в терминах возможных направлений, аналогичные тем, которые были приведены в § 2.4 для одношаговой задачи.

Предполагается, что функции $\Phi(x)$ и $f(x, u)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по всем своим переменным, а множества U_k, X_k ограничены и замкнуты.

§ 1. Сопряженная система

В дальнейшем, наряду с прямой системой уравнений (1.2.3.), играет такую же основную роль сопряженная (двойственная) система, которая будет введена в этом параграфе.

Рассмотрим сначала задачу оптимизации конечного состояния (задачу 1 § 1.3). При этом для удобства обозначений будем в дальнейшем считать, что уравнения движения (1.3.1) и ограничения (3.2), (3.5) не зависят от номера шага k . Естественно, что все утверждения распространяются и на общий случай задач, сформулированных в § 1.3.

Введем в пространстве состояний X следующую систему разностных уравнений:

$$p(k) = \left[\frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial x(k)} \right]^T p(k+1) \quad (k = N-1, \dots, 1), \quad (1.1)$$

где $p(k)$ — вектор с координатами $\{p_1(k), \dots, p_n(k)\}$,

$$\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} = \left[\frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_j} \right] \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

— квадратная матрица размера $(n \times n)$, T означает транспонирование.

Система (1.1) обычно называется *сопряженной* или *двойственной* (в отличие от прямой системы (1.2.3)),

а векторы $p(k)$ — сопряженными (двойственными) переменными.

Матрицы $\partial f(x(k), u(k))/\partial x(k)$ определены только в том случае, если для некоторого начального состояния $x(0)$ фиксировано управление u , и, следовательно, в силу уравнений движения (1.2.3) — траектория x . Поэтому о сопряженной системе имеет смысл говорить только для какого-то фиксированного процесса управления. В этом случае система (1.1) является линейной системой с переменными параметрами.

Заметим, что «время» в сопряженной системе направлено в обратную сторону, и значения переменных $p(k)$ ($k=N-1, \dots, 1$) определяются заданием величины $p(N)$ на последнем шаге. Для рассматриваемой задачи оптимизации конечного состояния положим

$$p(N) = \frac{\partial \Phi(x(N))}{\partial x(N)}, \quad (1.2)$$

где $\partial \Phi/\partial x$ — градиент показателя качества (1.3.1).

Таким образом, каждому фиксированному процессу управления $\{x(0), u, x\}$ соответствует своя сопряженная система (1.1), (1.2) со своим набором переменных $\{p(k)\}$.

Определим теперь функцию

$$H(p(k+1), x(k), u(k)) = (p(k+1), f(x(k), u(k))) \\ (k=0, \dots, N-1). \quad (1.3)$$

По аналогии с непрерывными процессами назовем эту функцию *функцией Гамильтона*.

С помощью функции Гамильтона уравнения (1.2.3) и (1.1) можно объединить в одну систему разностных уравнений (аналог гамильтоновой системы в непрерывном случае):

$$x(k+1) = \frac{\partial H(p(k+1), x(k), u(k))}{\partial p(k+1)} \quad (k=0, \dots, N-1), \\ p(k) = \frac{\partial H(p(k+1), x(k), u(k))}{\partial x(k)} \quad (k=N, \dots, 1), \quad (1.4)$$

с граничными условиями на «левом конце» $x(0)=a$ и на «правом конце» $p(N) = \frac{\partial \Phi(x(N))}{\partial x(N)}$. При фиксирован-

ных p и x функция Гамильтона становится функцией только управляющего воздействия u . В силу сделанных предположений эта функция дифференцируема по u .

Определим для каждого $u \in U$ конус допустимых вариаций $K(u)$ (см. § 2.3):

$$K(u) = \{\delta u \mid u + \varepsilon \delta u \in U; \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_1\}.$$

Будем предполагать, что выполнены условия регулярности § 2.3, так что конус $K(u)$ выпуклый и содержит внутренние точки.

Обозначим через $\delta_u H(p, x, u)$ допустимый дифференциал функции Гамильтона, т. е.

$$\delta_u H(p, x, u) = \left(\frac{\partial H(p, x, u)}{\partial u}, \delta u \right) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial H(p, x, u)}{\partial u_i} \delta u_i, \quad (1.5)$$

где $\delta u \in K(u)$.

Рассмотрим теперь задачу с суммарным показателем качества (задача 2 § 1.3). В этом случае, если воспользоваться записью уравнений движения (1.3.2) с показателем качества (1.3.6) в расширенном пространстве состояний $\tilde{X} = E^{n+1}$ (уравнения (1.3.12)), то сопряженная система для (1.3.12), как следует из (1.1), (1.2), запишется следующим образом:

$$\tilde{p}(k) = \left[\frac{\partial \tilde{f}(\tilde{x}(k), u(k))}{\partial \tilde{x}(k)} \right]^T \tilde{p}(k+1) \quad (k = N-1, \dots, 1), \quad (1.6)$$

где $\tilde{p}(k) = \{p_0(k), p_1(k), \dots, p_n(k)\}$, с граничным условием

$$\tilde{p}(N) = \tilde{e} = \{1, 0\}. \quad (1.7)$$

Аналогичный (1.3) и (1.4) вид будет иметь и функция Гамильтона

$$\tilde{H}(\tilde{p}(k+1), \tilde{x}(k), u(k)) = (\tilde{p}(k+1), \tilde{f}(\tilde{x}(k), u(k))) \quad (1.8)$$

и гамильтонова система

$$\tilde{x}(k+1) = \frac{\partial H(\tilde{p}(k+1), \tilde{x}(k), u(k))}{\partial \tilde{p}(k+1)}, \quad \tilde{x}(0) = \{0, a\},$$

$$\tilde{p}(k) = \frac{\partial H(\tilde{p}(k+1), \tilde{x}(k), u(k))}{\partial \tilde{x}(k)}, \quad \tilde{p}(N) = \{1, 0\}.$$

Используя (1.3.11), получим сопряженную систему для задачи 2 в «обычном» пространстве состояний $X = E^n$. Очевидно, из (1.6), (1.7) и (1.3.11) следует, что

$$p_0(k) = p_0(k+1) = p_0(N) = 1 \quad (k=1, \dots, N-1).$$

Поэтому сопряженная система для задачи 2 в пространстве X будет иметь вид

$$p(k) = \frac{\partial f_0(x(k), u(k))}{\partial x(k)} + \left[\frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial x(k)} \right]^T p(k+1) \quad (1.9)$$

с граничным условием

$$p(N) = 0, \quad (1.10)$$

а функция Гамильтона запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} H(p(k+1), x(k), u(k)) &= \\ &= f_0(x(k), u(k)) + (p(k+1), f(x(k), u(k))), \end{aligned} \quad (1.11)$$

причем

$$\delta_u H(p, x, u) = \left(\frac{\partial f_0(x, u)}{\partial u}, \delta u \right) + \left(p, \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \delta u \right). \quad (1.12)$$

§ 2. Задача оптимизации конечного состояния

Введенные в § 1 выражения позволяют сформулировать необходимые условия оптимальности для задач дискретного управления. В этом параграфе рассмотрим задачу оптимизации конечного состояния без ограничений на переменные состояния (задача 1 § 1.3).

При этом, помимо уже сформулированных требований, на функции $\Phi(x)$, $f(x, u)$ и множества U , $K(u)$ будем предполагать, что для оптимального конечного состояния*)

$$p^*(N) = \frac{\partial \Phi(x^*(N))}{\partial x(N)} \neq 0.$$

Теорема 2.1. Пусть $u^* = \{u^*(0), \dots, u^*(N-1)\}$ — оптимальное управление для начального состояния $x(0) = a$ в задаче 1. Имеет место неравенство

$$\delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) \leq 0 \quad (2.1)$$

*) По поводу этого условия см. § 4.

для любых $\delta u^*(k) \in \bar{K}(u^*(k))$ ($k=0, \dots, N-1$), где оптимальные значения x^* находятся из системы (1.2.3) при $x(0)=a$, а оптимальные значения p^* находятся из системы (1.1) с граничным условием (1.2).

Причем, если $u^*(k)$ — внутренняя точка множества U , то $\delta H(u^*(k))=0$ для любых допустимых вариаций в этой точке; если же $\delta H(u^*(k))<0$, то точка $u^*(k)$ является граничной точкой множества U .

Доказательство. Фиксируем оптимальный процесс $\{u^*, x^*\}$ и рассмотрим уравнение в вариациях на этом процессе

$$\delta x^*(k+1) = \frac{\partial f(x^*(k), u^*(k))}{\partial x(k)} \delta x^*(k) + \\ + \frac{\partial f(x^*(k), u^*(k))}{\partial u(k)} \delta u^*(k) \quad (k=0, 1, \dots, N-1), \quad (2.2)$$

где предполагается, что $\delta u^*(k) \in \bar{K}(u^*(k))$.

Пусть векторы $\{p^*(k)\}$ определены на оптимальном процессе из сопряженной системы (1.1) с граничным условием (1.2). Рассмотрим скалярное произведение

$$(p^*(k+1), \delta x^*(k+1)) = (p^*(k), \delta x^*(k)) + \\ + \left(p^*(k+1), \frac{\partial f(x^*(k), u^*(k))}{\partial u(k)} \delta u^*(k) \right). \quad (2.3)$$

Здесь последовательно были использованы уравнения (2.2), (1.1). Суммируя (2.3) по $k=0, 1, \dots, N-1$ и учитывая равенства $\delta x^*(0)=0$ и (1.2), получим

$$\delta \Phi(x^*(N)) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)), \quad (2.4)$$

где

$$\delta \Phi(x^*(N)) = \left(\frac{\partial \Phi(x^*(N))}{\partial x(N)}, \delta x^*(N) \right) \text{ и } \delta_u H(p^*(k+1), x^*(k),$$

$u^*(k))$ определено из (1.5).

Так как $x^*(N)$ — оптимальное состояние, то $\delta \Phi(x^*(N)) \geq 0$ для любых $\delta u^*(k) \in \bar{K}(u^*(k))$ вследствие теоремы 2.4.1.

Полагая $\delta u^*(j) = 0, j \neq k, \delta u^*(k) \neq 0$ ($k=0, 1, \dots, N-1$), из (2.4) получим, что $\delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) \leq 0$ при $\delta u^*(k) \in K(u^*(k))$.

Пусть теперь при каком-то k $u^*(k)$ — внутренняя точка множества U , тогда конусом $K(u^*(k))$ является все пространство вариаций. Поэтому если $\delta u^*(k) \in K(u^*(k))$, то и $-\delta u^*(k) \in K(u^*(k))$. Отсюда следует, что в данном случае

$$\frac{\partial H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k))}{\partial u(k)} = 0.$$

Если же $\delta H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) < 0$ в какой-то точке $u^*(k) \in U$, то, очевидно, она не может быть внутренней точкой множества U . Теорема доказана.

Пусть теперь ограничения на управляющие воздействия задаются в виде неравенств (1.2.2а); тогда из теоремы 2.1 получим следующую теорему (ср. теоремы 2.4.1 и 2.4.2).

Теорема 2.2. *На оптимальном управлении справедливы неравенства*

$$(p^*(k+1), \frac{\partial f(x^*(k), u^*(k))}{\partial u(k)} \delta u^*(k)) \leq 0, \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{\partial g_j(u^*(k))}{\partial u(k)}, \delta u^*(k) \right) \geq 0, \quad j \in J(u^*(k)) \quad (2.6)$$

$$(k=0, \dots, N-1),$$

где оптимальные значения x^* находятся из системы (1.2.3) с начальным условием $x(0) = a$, а оптимальные значения p^* — из системы (1.1) с граничным условием (1.2).

З а м е ч а н и е. Предполагается, что конусы $C(u^*(k))$, задаваемые неравенствами (2.3), имеют внутренние точки, т. е. для каждого $k=0, \dots, N-1$ существуют вариации $\delta u^*(k)$, для которых

$$\left(\frac{\partial g_j(u^*(k))}{\partial u(k)}, \delta u^*(k) \right) > 0, \quad j \in J(u^*(k)) \quad (2.7)$$

(см. § 2.3). Достаточным условием для выполнения (2.7) является линейная независимость векторов $\partial g_j(u^*(k))/\partial u(k), j \in J(u^*(k))$ (см. § 2.10).

Отметим, что теоремы 2.1, 2.2 являются полным аналогом теорем 4.1, 4.2 главы II. Это является следствием

общего принципа, что условия оптимальности для одношаговых задач переносятся на многошаговую задачу *).

Если ввести подходящие допустимые вариации δu управления u аналогично тому, как это было сделано для одношаговых задач в (2.3), (2.4), то теоремы 2.1, 2.2 утверждают, что для оптимального управления u^* не существует подходящих допустимых вариаций. Тем самым эти теоремы дают конструктивный метод для нахождения оптимального управления (см. гл. VI).

§ 3. Доказательство теоремы 2.1

Существует несколько способов доказательства теоремы 2.1, одно из самых простых приведено в § 2, другое связано с непосредственным применением необходимых условий экстремума функций многих переменных при ограничениях в виде равенств и неравенств (см. гл. II) для задачи дискретного управления. Однако использование этих условий для получения более тонких результатов теории дискретного управления было бы затруднительным. Поэтому в этом параграфе приводится «расширенное» доказательство теоремы 2.1 в том смысле, что в нем, помимо доказательства самих условий оптимальности, устанавливается еще ряд фактов, которые будут в дальнейшем применены для получения необходимых условий оптимальности в системах с фазовыми ограничениями (§ 6), принципа максимума (§ 4.2), достаточности необходимых условий оптимальности (§ 4.5).

Кроме того, это доказательство, в котором используются методы и построения доказательства принципа максимума для непрерывных процессов управления, позволяет выявить специфику и особенности задач оптимального дискретного управления.

1. Уравнение в вариациях. Для произвольного начального состояния $x(0)$ уравнений движения (1.2.3) фиксируем некоторое управление u . Пусть те-

*) Поскольку многошаговая задача оптимизации может трактоваться и как частный случай одношаговой задачи оптимизации функции многих переменных при наличии ограничений в виде равенств и неравенств. Подробнее об этом см. комментарии к главе IV.

перь начальное состояние изменилось на малую величину и стало

$$x(0) + \varepsilon \delta x(0) + o(\varepsilon). \quad (3.1)$$

Из-за начального возмущения $\varepsilon \delta x(0)$ изменится как-то вся траектория x .

В силу дифференцируемости функций $f(x, u)$ эти изменения можно представить в виде

$$x(k) + \varepsilon \delta x(k) + o(\varepsilon) \quad (k=1, \dots, N),$$

где $\delta x(k)$ определяются из следующей системы в вариациях:

$$\delta x(k+1) = \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial x(k)} \delta x(k) \quad (k=0, \dots, N-1). \quad (3.2)$$

Система (3.2) определяет в первом приближении изменения в траектории, происшедшие вследствие изменения начального состояния (3.1), при этом управление остается фиксированным.

Построим последовательность пространств вариаций δX_k ($k=0, \dots, N$). Будем предполагать, что начала координат этих пространств расположены в точках $x(k)$, т. е. векторы $\delta x(k)$ исходят из соответствующих точек $x(k)$. Уравнения (3.2) определяют, таким образом, перенос начальной вариации $\delta x(0)$ вдоль фиксированной траектории x .

Рассмотрим теперь совместно прямую (1.2.3) и сопряженную (1.1) системы при каком-то фиксированном процессе управления.

Лемма 1. Если $\delta x(k)$ — произвольное решение системы (3.2) с начальным состоянием $\delta x(0)$, а $p(k)$ — произвольное решение системы (1.1) с конечным состоянием $p(N)$, то скалярное произведение

$$(p(k), \delta x(k)) = \text{const} \quad (k=0, \dots, N).$$

Доказательство. При фиксированных u и x имеем, на основании (3.2) и (1.1):

$$\begin{aligned} (p(k), \delta x(k)) &= \left(p(k+1) \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial x(k)}, \delta x(k) \right) = \\ &= \left(p(k+1), \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial x(k)} \delta x(k) \right) = (p(k+1), \delta x(k+1)). \end{aligned}$$

Определим в пространстве δX_N гиперплоскость

$$(c, \delta x(N)) = \alpha, \quad (3.3)$$

где $c = \{c_1, \dots, c_n\}$ — произвольный вектор, $\alpha = \text{const}$. На основании леммы 1 будем иметь

$$(p(k), \delta x(k)) = \alpha \quad (k=0, \dots, N), \quad (3.4)$$

где вектор $p(k)$ находится из системы (1.1) с граничным условием $p(N) = c$. Соотношения (3.4) определяют, таким образом, в пространстве δX_k гиперплоскость, соответствующую гиперплоскости (3.3) пространства δX_N .

В итоге мы получаем следующую картину. Выбирая некоторое управление u , мы тем самым фиксируем для какого-то начального состояния соответствующую этому управлению траекторию. Если теперь на k -м шаге произошло малое возмущение траектории $\delta x(k)$, то уравнения в вариациях (3.2) определяют перенос этого возмущения вдоль рассматриваемой траектории в прямом направлении времени $k+1, k+2, \dots, N$. Совокупность всевозможных возмущений на s -м шаге образует пространство δX_s . Если в пространстве δX_s определить гиперплоскость $(p(s), \delta x(s)) = \alpha$, то сопряженные уравнения (1.1) определяют перенос этой гиперплоскости вдоль рассматриваемой траектории в обратном направлении времени $s-1, s-2, \dots, 0$.

2. Допустимые вариации. В предыдущем пункте изменения в траектории никак не связывались с изменениями в управлении. Управление считалось фиксированным. Далее будем предполагать, что любое изменение траектории на k -м шаге происходит в результате изменений в управлении в предшествовавшие шаги $s < k$.

Пусть u — некоторое допустимое управление: $u(k) \in U$ ($k=0, \dots, N-1$), и пусть x — траектория, соответствующая этому управлению и начальному состоянию $x(0) = a$. Очевидно, $x(k) \in R_k(a)$ ($k=1, \dots, N$).

Определим для множества U конус допустимых вариаций:

$$K(u) = \{\delta u \mid u + \varepsilon \delta u \in U, \quad 0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}; \quad u \in U\}.$$

Назовем последовательность $\delta u = \{\delta u(0), \dots, \delta u(N-1)\}$ допустимой вариацией допустимого управления u , если $\delta u(k) \in \bar{K}(u(k))$ при $k=0, \dots, N-1$. Соответствующие изменения в траектории в силу дифференцируемости правой части уравнений движения (1.2.3) можно представить в виде $x(k) + \varepsilon \delta x(k) + o(\varepsilon)$, причем эти новые состояния будут еще принадлежать множествам $R_h(a)$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_h$, где ε_h — некоторые числа.

Построим для множества $R_h(a)$ в точке $x(k) \in R_h(a)$ конус допустимых (в широком смысле) вариаций $M(x(k))$, состоящий из всех векторов $\delta x(k)$ пространства вариаций δX_h , для которых существует число $\varepsilon_h > 0$ такое, что $x(k) + \varepsilon \delta x(k) + o(\varepsilon) \in R_h(a)$ при любых $0 < \varepsilon < \varepsilon_h$.

Рассмотрим теперь специальную допустимую вариацию управления u следующего вида: $\{\delta u = 0, \dots, 0, \delta u(k), 0, \dots, 0\}$, где $\delta u(k) \in \bar{K}(u(k))$ и k — произвольное целое число между 0 и $N-1$. Соответствующие изменения в траектории можно представить в виде

$$\tilde{x}(s) = x(s) \quad (1 \leq s \leq k-1),$$

$$\tilde{x}(s) = x(s) + \varepsilon \delta x(s) + o(\varepsilon) \quad (k \leq s \leq N),$$

где $\tilde{x}(s)$ — новые состояния процесса.

Причем

$$\delta x(k+1) = \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial u(k)} \delta u(k), \quad (3.5)$$

где $\frac{\partial f}{\partial u} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right]$ ($i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, r$) — матрица размера $(n \times r)$.

При $s > k$ вариации $\delta x(s)$ находятся из уравнений в вариациях (3.2) с начальным состоянием $\delta x(k+1)$, которое определяется из (3.5). Решая уравнение (3.2), получим

$$\delta x(s) = \Psi(s, k+1) \delta x(k+1) \quad (k+1 \leq s \leq N), \quad (3.6)$$

где

$$\Psi(s, k+1) = \prod_{i=k+1}^{s-1} \mathcal{A}(i) \quad (3.7)$$

и $\mathcal{A}(i)$ — линейное преобразование, задаваемое матрицей $\partial f(x(i), u(i))/\partial x(i)$, $\Psi(k, k) = I$ — единичная матрица.

Пусть $M_{k+1, k+1}(x(k+1)) \subset \delta X_{k+1}$ — конус допустимых вариаций для множества $\bar{R}_1(x(k))$ с вершиной в точке $x(k+1) \in R_1(x(k))$. Очевидно, при сделанных предположениях относительно конусов $K(u(k))$

$$M_{k+1, k+1}(x(k+1)) = B(k) \bar{K}(u(k)), \quad (3.8)$$

где $B(k)$ — линейное преобразование, задаваемое матрицей $\partial f(x(k), u(k))/\partial u(k)$, и $\bar{K}(u(k))$ — замыкание конуса $K(u(k))$.

С помощью линейных преобразований $\Psi(s, k)$ ($s = k+1, \dots, N$) построим последовательность пространств δX_s и конусов в них: $M_{s, k+1}(x(s)) \subseteq \delta X_s$, где

$$M_{s, k+1}(x(s)) = \Psi(s, k+1) M_{k+1, k+1}(x(k+1)). \quad (3.9)$$

Меняя k ($0 \leq k \leq N-1$), получим связь между конусами $M(x(s))$ и $M_{s, k}(x(s))$:

$$M(x(s)) = \bigcup_{k=1}^s M_{s, k}(x(s)). \quad (3.10)$$

(Предполагаем, что существует единственная траектория, переводящая $x(0)$ в $x(N)$. Обобщение на случай неединственности см. в § 4.5.) Из (3.10) следует, что $M_{sk}(x(s)) \subseteq M(x(s))$.

Таким образом, в результате этих построений получаем следующую картину (рис. 3.3.1). Построим для произвольного допустимого управления u последовательность конусов $\bar{K}(u(k))$ ($k=0, \dots, N-1$), которые определяют всевозможные допустимые вариации этого управления. При начальном состоянии $x(0)=a$ этому управлению соответствует траектория x , причем $x(k) \in R_k(a)$ ($k=1, \dots, N$). Последовательности конусов $\bar{K}(u(k)) \subseteq \delta U_k$ ($k=0, \dots, N-1$) соответствует последовательность конусов $M_{k+1, k+1}(x(k+1)) \subseteq \delta X_{k+1}$ ($k=0, \dots, N-1$). Конусы $M_{k+1, k+1}(x(k+1))$ определяют допустимые вариации состояний $\delta X(k+1)$ по множествам $R_1(x(k))$ и связаны с конусами $\bar{K}(u(k))$ посредством соотношений (3.8).

Фиксируем теперь какой-нибудь шаг k ($1 \leq k \leq N$) и конус $M_{k,k}(x(k))$ на этом шаге. Уравнение в вариациях (3.2) (или (3.6)) определит перенос этого конуса в пространства δX_s ($s > k$). Получающиеся при этих преобразованиях конусы $M_{s,k}(x(s))$ показывают, какие изменения будут происходить в состоянии $x(s)$ на s -м шаге

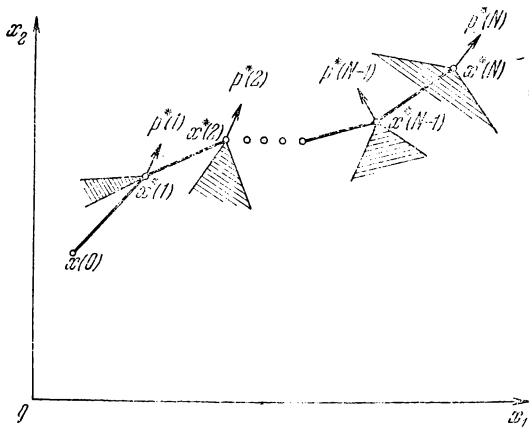


Рис. 3.3.1.

из-за допустимых вариаций состояния $x(k)$ на k -м шаге ($s > k$).

Построим теперь для состояния $x(s) \in R_s(a)$ конус допустимых (по множеству $R_s(a)$) вариаций $M(x(s))$. Очевидно, конус $M(x(s))$ будет определяться всеми допустимыми вариациями управлений $u(k)$ на предшествовавших шагах k ($k=0, \dots, s-1$), т. е. справедливо соотношение (3.10) (в случае единственности траектории x).

3. Условия оптимальности. Рассмотрим теперь управление u^* и соответствующую ему траекторию x^* , являющиеся оптимальными для начального состояния $x(0)=a$. Очевидно, $x^*(k) \in R_k(a)$ ($k=1, \dots, N$).

Лемма 2. Справедливо неравенство

$$(p^*(N), \delta x^*(N)) \leq 0 \quad (3.11)$$

для любых $\delta x^*(N) \in M(x^*(N))$, т. е. конус $M(x^*(N))$ целиком расположен в полупространстве, определяемом неравенством (3.11).

Заметим, что, по предположению, $p^*(N) \neq 0$.

Доказательство. Допустим противное. Пусть существует вариация $\delta x^*(N) \in M(x^*(N))$ и в то же время

$$(p^*(N), \delta x^*(N)) > 0. \quad (3.12)$$

По определению конуса $M(x^*(N))$, существует такое число $\varepsilon_N > 0$, что $x(N) = x^*(N) + \varepsilon \delta x^*(N) + o(\varepsilon) \in R_N(a)$ при любых $0 < \varepsilon < \varepsilon_N$. Представим функцию $\Phi(x(N))$ вблизи оптимальной точки $x^*(N)$ в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x(N)) &= \Phi(x^*(N)) + \varepsilon \delta \Phi(x^*(N)) + o(\varepsilon) = \\ &= \Phi(x^*(N)) + \varepsilon (p^*(N), \delta x^*(N)) + o(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $p^*(N)$ определено из (1.2).

Из неравенства (3.12) и (3.13) следует, что найдется такое ε ($0 < \varepsilon < \varepsilon_N$), что $\Phi(\bar{x}(N)) > \Phi(x^*(N))$ и в то же время $\bar{x}(N) = x^*(N) + \varepsilon \delta x^*(N) + o(\varepsilon) \in R_N(a)$. Это противоречит оптимальности $x^*(N)$.

Итак, гиперплоскость $(p^*(N), \delta x^*(N)) = 0$ пространства вариаций δX_N является опорной гиперплоскостью конуса $M(x^*(N))$ в его вершине. Так как конусы $M(x^*(N))$ и $M_{N,k+1}(x^*(N))$ ($0 \leq k \leq N-1$) имеют общую вершину и $M_{N,k+1}(x^*(N)) \subseteq M(x^*(N))$, то эта гиперплоскость будет опорной и конусу $M_{N,k+1}(x^*(N))$. Осуществляя на основе леммы 1 перенос этой гиперплоскости в пространство вариаций δX_{k+1} , получим, что справедливо утверждение:

Л е м м а 3. Гиперплоскость: $(p^*(k+1), \delta x^*(k+1)) = 0$, где вектор $p^*(k+1)$ находится из сопряженной системы (1.1) с граничным условием (1.2), является опорной конусу $M_{k+1,k+1}(x^*(k+1))$ в его вершине, т. е.

$$(p^*(k+1), \delta x^*(k+1)) \leq 0 \quad (3.14)$$

для любых $\delta x^*(k+1) \in M_{k+1,k+1}(x^*(k+1))$.

Действительно, из леммы 2 следует, что $(p^*(N), \delta x^*(N)) \leq 0$ для всех $\delta x^*(N) \in M_{N,k+1}(x^*(N))$. Или, на основании леммы 1 и построений п. 2 доказательства, $(p^*(k+1), \delta x^*(k+1)) \leq 0$ для любых $\delta x^*(k+1) \in M_{k+1,k+1}(x^*(k+1))$.

Перенесем эти рассуждения в пространство управлений.

По определению функции Гамильтона,

$$\delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) = \left(p^*(k+1), \frac{\partial f(x^*(k), u^*(k))}{\partial u(k)} \delta u^*(k) \right) = (p^*(k+1), \delta x^*(k+1)),$$

где $\delta u^*(k) \in \bar{K}(u^*(k))$.

Отсюда и из леммы 3 получим первое утверждение теоремы. Причем, если $u^*(k)$ — внутренняя точка множества U_k , то из неравенства (3.14) следует, что

$$\delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) \leq 0 \quad (3.15)$$

для всех $\delta u^*(k) \in \delta U_k$, или

$$\frac{\partial H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k))}{\partial u(k)} = 0. \quad (3.16)$$

Допустим теперь, что для какой-то другой точки $u^*(s)$ имеет место строгое неравенство

$$\delta_u H(p^*(s+1), x^*(s), u^*(s)) < 0$$

для всех $\delta u^*(s) \in \bar{K}(u^*(s))$. Так как для внутренних точек справедливо равенство (3.16), то, следовательно, точка $u^*(s)$ — граничная точка множества U .

Теорема 2.1 полностью доказана.

Так как при сделанных предположениях о регулярности конусов конус $C(u^*(k))$ совпадает с конусом $\bar{K}(u^*(k))$ (см. § 2.3), то из теоремы 2.1 непосредственно следует теорема 2.2.

§ 4. Вырожденный случай

При формулировке теорем 2.1, 2.2 требовалось, чтобы на оптимальном управлении $\partial \Phi(x^*(N))/\partial x(N) \neq 0$.

Пусть теперь

$$\frac{\partial \Phi(x^*(N))}{\partial x(N)} = 0. \quad (4.1)$$

Из (1.1) и (1.2) следует, что тогда при всех $k=N, \dots, 1$ $p^*(k)=0$, поэтому $H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) \equiv 0$ и теорема 2.1 перестает иметь смысл.

Однако если на неоптимальных траекториях $\partial \Phi(x(N))/\partial x(N) \neq 0$, то при условии невырожденности матриц $\partial f/\partial x(k)$ векторы $p(k) \neq 0$. Поэтому не все векторы $\partial H/\partial u(k)$ равны 0 (в противном случае мы имели бы стационарное управление u), и, следовательно, можно определить направление движения к оптимуму (см. § 6.2), при котором уже все $\partial H(u(k))/\partial u(k) = 0$ (здесь для простоты предполагается, что на переменные $u(k)$ нет ограничений).

С другой стороны, из равенства (4.1) легко определяется оптимальное конечное состояние $x^*(N) \in R_N(a)$, и задача сводится к нахождению любого допустимого управления, переводящего $x(0)=a$ в $x^*(N)$ за N шагов. Это можно сделать стандартными способами (см. § 6.3). Заметим, что, как правило, таких управлений будет не одно.

В качестве примера рассмотрим линейную дискретную систему n -го порядка ($x(k) \in E^n$; $u(k) \in E^1$):

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k) \quad (k=0, 1, \dots, N-1), \quad (4.2)$$

где $u(k)$ — скалярные величины ($r=1$), принимающие любые действительные значения.

Показатель качества $J = -(x(N), x(N))$.

Решение линейной системы (4.2) имеет вид

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} b u(j), \quad (4.3)$$

или

$$x(k) = h(k) + \sum_{j=0}^{k-1} w(k-j) u(j),$$

где $h(k) = A^k x(0)$ и $w(k-j) = A^{k-j-1} b$.

Пусть $N=n$, n — порядок системы, и пусть система управляема, т. е. векторы $w(0), \dots, w(n-1)$ линейно независимы. Тогда любой вектор $h(n)$ можно однозначно разложить по векторам $w(j)$ ($j=0, \dots, n-1$):

$$h(n) = - \sum_{j=0}^{n-1} w(n-j) u^*(j). \quad (4.4)$$

Выбирая коэффициенты в (4.4) при $w(j)$ в качестве управляющих воздействий: $u(j) = u^*(j)$ ($j=0, \dots, n-1$), получим, что $x^*(n) = 0$. Очевидно, что при $x^* = 0$ функция J достигает своего максимального значения, причем $\partial J(x^*(N))/\partial x(N) = 0$. Таким образом, любое управление, переводящее $x(0)$ в начало координат, будет оптимальным.

С другой стороны, при сделанных предположениях начало координат достигается из любого начального состояния за n шагов или меньше, а оптимальное управление единственно. Для его нахождения достаточно решить систему линейных уравнений (4.4).

Если же $N > n$ и условие управляемости по-прежнему выполнено, то в этом случае осуществить разложение

$$h(N) = - \sum_{j=0}^{N-1} w(N-j) u^*(j) \quad (4.5)$$

можно уже многими способами и управления, переводящие $x(0)$ в начало координат, будут составлять подпространство пространства управлений размерности $N-n$.

Заметим, что в этом случае можно ввести новый показатель качества (например, типа суммарного (1.3.2)) и оптимизировать его по всем управлениям, переводящим $x(0)$ в 0, т. е. удовлетворяющим (4.5).

Аналогичные рассуждения имеют место и в нелинейном случае.

§ 5. Задача с суммарным показателем качества

Так как задача с суммарным критерием (задача 2 главы I) приводится к частному виду задачи 1 (см. § 1.3), то из теоремы 2.1 легко получить условия оптимальности и для этой задачи.

Именно, из неравенства (2.1) следует, что на оптимальном управлении допустимый дифференциал функции Гамильтона $\tilde{H}$ всегда неположителен:

$$\delta_u \tilde{H}_*(\tilde{p}^*(k+1), \tilde{x}^*(k), u^*(k)) \leq 0, \delta u^*(k) \in \bar{K}(u^*(k)),$$

здесь оптимальные значения $\tilde{p}^*(k)$ определяются из сопряженной системы (1.6) с граничным условием

$\tilde{p}^*(N) = \{1, 0\}$. Таким образом, в этом случае условие $\tilde{p}^*(N) \neq 0$ выполнено всегда. Переходя к обычной «*n*-мерной» записи, получим теорему.

Теорема 5.1. Пусть u^* — управление, оптимальное для начального состояния $x(0) = a$ в задаче 2. На оптимальном управлении справедливы неравенства

$$\left(\frac{\partial f_0(x^*(k), u^*(k))}{\partial u(k)}, \delta u^*(k) \right) + \\ + \left(p^*(k+1), \frac{\partial f(x^*(k), u^*(k))}{\partial u(k)} \delta u^*(k) \right) \leq 0 \quad (5.1)$$

для любых $\delta u^*(k) \in \bar{K}(u^*(k))$ ($k=0, \dots, N-1$), где оптимальные значения x^* находятся из системы (1.2.3) при $x(0) = a$, а оптимальные значения p^* — из системы (1.9) при условии (1.10).

§ 6. Задача с ограничениями на переменные состояния

Рассмотрим теперь задачу оптимизации конечного состояния при следующих ограничениях на переменные управления и состояния:

$$x(k) \in X_k \quad (k=1, \dots, N), \\ u(k) \in U_k \quad (k=0, \dots, N-1).$$

Начальное состояние $x(0) = a$ считается фиксированным. Ограничения (6.1), (6.2) обычно задаются в виде систем неравенств

$$h_j(k, x(k)) \geq 0 \quad (j=1, \dots, s(k)), \quad (6.3)$$

$$g_j(k, u(k)) \geq 0 \quad (j=1, \dots, m(k)). \quad (6.4)$$

Отметим, что здесь, для того чтобы рассмотреть и общий случай, уже не предполагается независимость условий от шага k , в отличие от §§ 1—5 (см. замечание в начале § 1).

Определим для управляющего воздействия $u \in U_k$ конус допустимых вариаций $K_k(u)$ (см. § 2.3), причем будем предполагать, что он выпуклый и имеет внутренние точки. Для любого состояния $x \in X_k$ построим конус допустимых вариаций в широком смысле (см. § 2.3)

$M_k(x)$; будем также предполагать, что он выпуклый и имеет внутренние точки. Таким образом, рассматриваются только такие множества U_k и X_k , которые имеют внутренние точки, соответственно, в пространствах E^r и E^n (и, кроме того, не имеют «острых» выступов типа рис. 2.3.1, ∂).

Для ограничений в виде неравенств (6.3), (6.4) эти конусы можно задать с помощью системы линейных неравенств

$$C_k(x) = \left\{ \delta x \left| \left(\frac{\partial h_j(k, x)}{\partial x}, \delta x \right) \geq 0; \quad j \in J_k(x) \right. \right\}, \quad (6.5)$$

$$C_k(u) = \left\{ \delta u \left| \left(\frac{\partial g_j(k, u)}{\partial u}, \delta u \right) \geq 0; \quad j \in J_k(u) \right. \right\}, \quad (6.6)$$

относительно которых будем предполагать, что градиенты «активных» ограничений $\partial h_j(k, x)/\partial x$, $j \in J_k(x)$, и $\partial g_j(k, u)/\partial u$, $j \in J_k(u)$, линейно независимы. Таким образом для конусов $C_k(x)$ и $C_k(u)$ также предполагаются выполненными условия регулярности § 2.3.

Здесь $J_k(x)$ и $J_k(u)$ — множества индексов

$$J_k(x) = \{j | h_j(k, x) = 0; \quad j = 1, \dots, s(k)\},$$

$$J_k(u) = \{j | g_j(k, u) = 0; \quad j = 1, \dots, m(k)\}.$$

Будем предполагать также, что оптимальное управление для рассматриваемой задачи существует, причем, как и в § 2, будем считать, что $p^*(N) = \frac{\partial \Phi(x^*(N))}{\partial x(N)} \neq 0$.

Фиксируем в задаче некоторый допустимый процесс $\{u, x\}$ (т. е. удовлетворяющий (1.2.3), (6.1), (6.2)).

Назовем вариацию δu управления u допустимой, если

$$\delta u(k) \in \bar{K}_k(u(k)) \quad (k=0, 1, \dots, N-1),$$

$$\delta x(k) \in M_k(x(k)) \quad (k=1, \dots, N),$$

$$\delta x(k+1) = \frac{\partial f(x(k), u(k), k)}{\partial x(k)} \delta x(k) + \frac{\partial f(x(k), u(k), k)}{\partial u(k)} \delta u(k).$$

В общем случае справедливы следующие условия оптимальности.

Теорема 6.1. Пусть u^* — оптимальное управление, x^* — соответствующая ему при заданном начальном состоянии $x(0) = a$ траектория.

Тогда на оптимальном процессе справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{N-1} \delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k), k) \leq 0$$

для всех допустимых вариаций оптимального управления u^* , где значения p^* удовлетворяют сопряженной системе (1.1), (1.2).

Доказательство. Будем считать, что существуют ненулевые допустимые вариации δu^* оптимального управления (в противном случае утверждение теоремы тривиально).

Предположим тогда, что существует такая допустимая вариация δu^* , что

$$\sum_{k=0}^{N-1} \delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k), k) > 0.$$

В этом случае из определения допустимой вариации следует, что найдутся такие векторы $o_k(\varepsilon)$ и число $\tilde{\varepsilon} > 0$, что

$$\tilde{u}(k) = u^*(k) + \tilde{\varepsilon} \delta u^*(k) \in U_k,$$

$$\tilde{x}(k) = x^*(k) + \tilde{\varepsilon} \delta x^*(k) + o_k(\varepsilon) \in X_k,$$

$$\tilde{x}(k+1) = f(\tilde{x}(k), \tilde{u}(k), k) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1),$$

и в то же время

$$\Phi(\tilde{x}(N)) > \Phi(x^*(N)).$$

Это противоречит оптимальности u^* .

Допустим теперь, что существуют ненулевые специальные допустимые вариации оптимального управления u^* , т. е. такие допустимые вариации δu^* , которые можно представить в виде $\{0, \dots, \delta u^*(k), \dots, 0\}$.

Для этого достаточно потребовать, чтобы при любом допустимом процессе $\{u, x\}$ нашлись такие положительные числа $\varepsilon(k)$ ($k=0, 1, \dots, N-1$), что при всех $u'(k) \in S_{\varepsilon(k)}(u(k)) \cap U_k$ существовали $x'(k) \in X_k$, $x'(k+1) = f(x'(k), u'(k), k)$.

В этом случае условия оптимальности приобретают более привычную форму.

Теорема 6.2. Пусть u^* — оптимальное управление, x^* — соответствующая ему при заданном начальном состоянии $x(0) = a$ траектория.

Тогда на оптимальном управлении справедливы неравенства

$$\delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k), k) \leq 0 \quad (k=0, \dots, N-1) \quad (6.7)$$

для всех $\delta u^*(k)$, удовлетворяющих условиям

$$\delta u^*(k) \in \bar{K}_k(u^*(k)), \quad (6.8)$$

$$\delta x^*(s) \in M_s(x^*(s)) \quad (s=k+1, \dots, N), \quad (6.9)$$

где $\delta x^*(s)$ определяются из уравнений

$$\delta x^*(k+1) = \frac{\partial f(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial u(k)} \delta u^*(k), \quad (6.10)$$

$$\delta x^*(s+1) = \frac{\partial f(x^*(s), u^*(s), s)}{\partial x(s)} \delta x^*(s) \quad (s=k+1, \dots, N-1), \quad (6.11)$$

причем оптимальные значения x^* находятся из уравнений (1.2.3) при $x(0) = a$, а оптимальные значения p^* — из уравнений (1.1) при условии (1.2).

Условия теоремы, несмотря на их несколько громоздкую запись, имеют простой смысл: на оптимальном управлении дифференциал функции Гамильтона по допустимым вариациям $\delta u^*(k)$ неположителен, причем здесь под допустимыми вариациями понимаются такие, которые не только не выводят управление за пределы множества U_k на k -м шаге, но вдобавок еще и не выводят возмущенную траекторию за пределы множеств X_s в последующие шаги $s > k$.

Введем матрицы

$$B^*(k) = \frac{\partial f(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial u(k)} \quad (k=0, \dots, N-1), \quad (6.12)$$

$$A^*(k) = \frac{\partial f(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial x(k)} \quad (k=1, \dots, N), \quad (6.13)$$

$$\Psi^*(s, k) = \prod_{i=k}^{s-1} A^*(i) \quad (0 \leq k \leq s \leq N), \quad (6.14)$$

где $\Psi(k, k) = I$ — единичная матрица.

Тогда условия оптимальности (6.7) — (6.11) можно переписать в виде

$$\delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k), k) \leq 0$$

для любых $\delta u^*(k)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} \delta u^*(k) &\in \bar{K}_k(u^*(k)), \\ \Psi^*(s, k+1) &= B^*(k) \delta u^*(k) \in M_s(x^*(s)) \\ (0 \leq k+1 \leq s \leq N). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Если ограничения на u и x задаются в виде неравенств (6.3), (6.4), то необходимые условия оптимальности будут иметь вид.

Теорема 6.3. Пусть u^* — оптимальное управление в задаче 1 при ограничениях (6.3), (6.4).

Определим при $x(0) = a$ из (1.2.3) соответствующую траекторию x^* , а из (1.1) при (1.2) последовательность p^* .

Определим последовательности индексных множеств $J_k(u^*(k))$ и $J_k(x^*(k))$.

Тогда на оптимальном процессе справедливы неравенства

$$\delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k), k) \leq 0$$

при любых $\delta u^*(k)$, удовлетворяющих следующей системе неравенств:

$$\left(\frac{\partial g_j(k, u^*(k))}{\partial u(k)}, \delta u^*(k) \right) \geq 0, \quad j \in J_k(u^*(k)), \quad (6.16)$$

$$\left(\frac{\partial h_j(k, x^*(s))}{\partial x(s)}, \delta x^*(s) \right) \geq 0, \quad j \in J_s(x^*(s)), \quad (6.17)$$

где векторы $\delta x^*(s)$ ($0 \leq k \leq s \leq N$) определяются из уравнений (6.10), (6.11).

Заметим, что неравенства (6.17) в силу (6.10), (6.11) определяют, по существу, ограничения на $\delta u^*(k)$ (ср. с (6.15)).

Таким образом, по сравнению с соответствующими условиями оптимальности без ограничений на переменные состояния (теоремы 2.1, 2.2) к ограничениям на вариации управления (6.8) (или (6.16)) добавились ограничения (6.9) (или 6.17)].

Доказательство. Прежде всего построим для рассматриваемой задачи множества достижимости (см. § 1.4)

$$Q_1 = f(a, U_0, 0) \cap X_1, \quad Q_k = f(Q_{k-1}, U_{k-1}, k-1) \cap X_k \\ (k=2, \dots, N). \quad (6.18)$$

Пусть u^* — оптимальное управление, x^* — соответствующая ему при $x(0) = a$ траектория. Очевидно, $x^*(k) \in Q_k(a)$. Рассмотрим специальную допустимую вариацию δu^* оптимального управления вида

$$\delta u^* = \{0, \dots, 0, \delta u^*(k-1), 0, \dots, 0\}, \\ \delta u^*(k-1) \in \bar{K}_{k-1}(u^*(k-1)) \quad (1 \leq k \leq N).$$

Соответствующая вариация δx^* траектории будет иметь вид

$$\delta x^*(s) = 0 \quad (1 \leq s \leq k-1), \\ \delta x^*(k) = B^*(k-1) \delta u^*(k-1), \\ \delta x^*(s) = \Psi^*(s, k) \delta x^*(k) \quad (k \leq s \leq N),$$

где $B^*(k-1)$, $\Psi^*(s, k)$ определены из (6.12) — (6.14). Обозначим конусы

$$M_{k,k}^u(x^*(k)) = B^*(k-1) \bar{K}_{k-1}(u^*(k-1)), \\ M_{k,k}(x^*(k)) = M_{k,k}^u(x^*(k)) \cap M_k(x^*(k)).$$

Конус $M_{k,k}(x^*(k))$ определяет в пространстве вариаций δX_k множество допустимых вариаций в точке $x^*(k)$ по множествам X_k и U_{k-1} ($x^*(k-1)$ фиксировано, $u^*(k-1)$ варьируется). Заметим, что в силу сделанных предположений эти конусы невырожденные, т. е. содержат кроме начала координат и другие точки.

Далее построим конусы

$$M_{s,k}(x^*(s)) = M_{s,k}^u(x^*(s)) \cap M_s(x^*(s)) \quad (k < s \leq N),$$

где

$$M_{s,k}^u(x^*(s)) = A^*(s-1) M_{s-1,k}(x^*(s-1)).$$

Конус $M_{s,k}(x^*(s))$ определяет допустимые по множествам U_{k-1} и X_j ($k \leq j \leq s \leq N$) вариации в точке $x^*(k)$.

Обозначим через $M(x^*(s))$ конус допустимых вариаций в точке $x^*(s)$ по множеству Q_s . Конус $M(x^*(s))$ определяется всеми вариациями управления $\delta u^*(k)$ ($0 \leq k \leq s-1$), допустимыми как по ограничениям (6.1), так и по ограничениям (6.2), т. е.

$$M(x^*(s)) = \bigcup_{k=0}^{s-1} M_{s,k}(x^*(s)). \quad (6.19)$$

Очевидно, $M_{s,k}(x^*(s)) \subseteq M(x^*(s))$.

Далее, так же, как и в § 3 (лемма 2), из того, что в точке $x^*(N)$ достигается максимум функции $\Phi(x(N))$ на множестве Q_N :

$$\max_{x(N) \in Q_N} \Phi(x(N)) = \Phi(x^*(N)), \quad (6.20)$$

следует, что в этой точке

$$(p^*(N), \delta x^*(N)) \leq 0 \quad (6.21)$$

для всех $\delta x^*(N) \in M(x^*(N))$, где $p^*(N)$ определяется из (1.2). Но из-за (6.19) неравенство (6.21) справедливо и для $\delta x^*(N) \in M_{N,k}(x^*(N))$.

Так как $(p^*(k), \delta x^*(k)) = \text{const}$ (лемма 1 § 3) для любых $p^*(k)$ и $\delta x^*(k)$, определяемых из (1.1) и (6.11), то, очевидно, из неравенства (6.21) следует, что

$$(p^*(k), \delta x^*(k)) \leq 0$$

для всех $\delta x^*(k)$, допустимых по ограничениям U_{k-1} , X_k , $X_{k+1}, \dots, X_N$. Или

$$\left(p^*(k), \frac{\partial f(x^*(k-1), u^*(k-1), k-1)}{\partial u(k-1)} \delta u^*(k-1) \right) \leq 0$$

для всех

$$\begin{aligned} \delta u^*(k-1) &\in \bar{K}_{k-1}(u^*(k-1)), \\ \delta x^*(k) &= B^*(k-1) \delta u^*(k-1) \in M_k(x^*(k)), \\ \delta x^*(s) &= A^*(s-1) \delta x^*(s-1) \in M_s(x^*(s)) \\ &\quad (k+1 \leq s \leq N). \end{aligned}$$

Теорема 6.2 доказана.

Утверждение теоремы 6.3 следует из теоремы 6.2 и из эквивалентности при сделанных предположениях конусов $\bar{K}_k(u^*(k))$, $M_s(x^*(s))$ и $C_k(u^*(k))$, $C_s(x^*(s))$.

Как известно, в задачах управления непрерывными процессами функция Гамильтона на оптимальном управлении всегда имеет максимальное значение. Этот факт, получивший название *принципа максимума* Л. С. Понтрягина, позволил построить эффективную группу методов определения оптимального управления в непрерывных процессах.

Цель этой главы — рассмотреть поведение функции Гамильтона на оптимальном управлении в дискретном случае и выделить классы дискретных процессов, для которых также справедлив принцип максимума. В этой главе будет рассмотрен случай отсутствия ограничений на переменные состояния. Обобщение на ограниченные переменные состояния дано в следующей главе.

§ 1. Функция Гамильтона на оптимальном управлении

В главе III (теорема 2.1) было показано, что допустимый дифференциал функции Гамильтона на оптимальном управлении не положителен, т. е.

$$\delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) \leq 0 \quad (1.1)$$

для всех $\delta u^*(k) \in \bar{K}(u^*(k))$ ($k=0, \dots, N-1$), где $\bar{K}(u^*(k))$ — некоторый подходящим образом выбранный конус допустимых вариаций в точке $u^*(k)$.

Таким образом, на оптимальном управлении выполнены необходимые условия максимума функции $H(u(k))$ на множестве U (ср. с теоремой 2.4.1).

Если $u^*(k)$ — внутренняя точка множества U , то из теоремы 3.2.1 следует, что в этой точке

$$\frac{\partial H(u^*(k))}{\partial u(k)} = 0, \quad (1.2)$$

т. е. приходим к «обычным» необходимым условиям экстремума функции многих переменных в случае, когда нет ограничений на эти переменные.

Заметим, что если $\delta_u H(u^*(k)) < 0$ в (1.1), т. е. если градиент функции Гамильтона $\partial H / \partial u(k)$ не равен 0 и не ортогонален всем допустимым вариациям в точке $u^*(k)$, то при некоторых предположениях регулярности точка $u^*(k)$ доставляет функции $H(u(k))$ локальный максимум. Это легко видеть из разложения

$$H(u(k)) - H(u^*(k)) = \varepsilon \delta_u H(u^*(k)) + o(\varepsilon) \quad (1.3)$$

(ср. с § 2.4). В случае же, когда $\delta_u H(u^*(k)) = 0$ для некоторых или для всех допустимых $\delta u^*(k)$ ((1.1), (1.2)), то о поведении функции Гамильтона в точке $u^*(k)$ сказать ничего определенного нельзя, так как оно будет определяться знаком $o(\varepsilon)$ в (1.3). Рассмотрим пример.

Пример. Пусть уравнения движения имеют вид ($n=2, r=1$)

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + 2u(k), \\ x_2(k+1) &= -x_1^2(k) + x_2(k) + u^2(k) \\ (k=0, 1). \end{aligned}$$

На управляющее воздействие наложено ограничение $|u(k)| \leq 5$. Требуется для начального состояния $x_1(0) = 3, x_2(0) = 0$ найти допустимое управление $\{u(0), u(1)\}$, доставляющее показателю качества $J = x_2(2)$ максимальное значение.

Из уравнений движения при выбранном начальном состоянии нетрудно получить в явном виде зависимость показателя качества от управляющих воздействий:

$$J = -3u^2(0) - 12u(0) + u^2(1) - 18,$$

откуда оптимальное управление будет $u^*(0) = -2, u^*(1) = \pm 5$.

Функция Гамильтона для данной задачи имеет вид

$$H = p_1(k+1)[x_1(k) + 2u(k)] +$$

$$+ p_2(k+1)[-x_1^2(k) + x_2(k) + u^2(k)]$$

Используя уравнения движения и сопряженную систе-

му (3.1.1), получим оптимальные значения переменных $x^*(k)$ и $p^*(k)$ ($k=1, 2$):

$$\begin{aligned}x_1^*(1) &= -1, & x_2^*(1) &= -5; & p_1^*(2) &= 0, & p_2^*(2) &= 1, \\p_1^*(1) &= 2, & p_2^*(1) &= 1.\end{aligned}$$

Подставляя эти значения в выражение для функции H , получим

$$\begin{aligned}H(u(0)) &= u^2(0) + 4u(0) - 3, \\H(u(1)) &= u^2(1) - 6.\end{aligned}$$

Очевидно, функция Гамильтона на втором шаге $H(u(1))$ при оптимальном управлении ($u^*(1) = \pm 5$) достигает максимального значения, а функция Гамильтона $H(u(0))$ на первом шаге при оптимальном управлении ($u^*(0) = -2$) имеет минимальное значение (см. рис. 6.16.4).

Можно построить более сложные примеры, в которых функция Гамильтона на оптимальном управлении имеет локальные экстремумы, седло и т. п.

Это же видно из доказательства теоремы 3.2.1. Действительно, схема доказательства была следующая. Из того, что функция $\Phi(x^*(N))$ достигает максимального значения на множестве $R_N(a)$ в точке $x^*(N)$, вытекало, что гиперплоскость $(p^*(N), \delta x^*(N)) = 0$ пространства вариаций δX является опорной конусу допустимых вариаций по множеству $R_N(a)$ в этой точке. Или гиперплоскости $(p^*(k), \delta x^*(k)) = 0$ ($k=N, \dots, 1$) — опорные конусам допустимых вариаций по множествам $R_1(x^*(k-1))$ в точках $x^*(k)$. Однако из того, что гиперплоскость $(p^*(k), \delta x^*(k)) = 0$ является опорной конусу допустимых вариаций, в общем случае не следует, что соответствующая гиперплоскость пространства состояний $(p^*(k), x(k)) = (p^*(k), x^*(k))$ (функция Гамильтона) будет опорной множеству $R_1(x^*(k-1))$ в этой точке. Этот факт следует из выпуклости множества $R_1(x^*(k-1))$ (ср. с § 2.5).

Получить дополнительную информацию о поведении функции Гамильтона на оптимальном управлении можно, либо рассматривая члены второго порядка малости

в разложении (1.3), либо исследуя свойства множеств $R_1(x^*)$.

Рассмотрим сначала второй подход.

§ 2. Задача оптимизации конечного состояния

Рассмотрим сначала задачу 1 § 1.3 (без ограничений на переменные состояния). Определим для этой задачи множества достижимости за один шаг (см. гл. I):

$$R_1(x) = \{z | z = f(x, u), u \in U\}.$$

Будем предполагать, что на функции $\Phi(x)$, $f(x, u)$ и множество U наложены те же условия, что и в главе III.

Теорема 2.1. Пусть множества $R_1(x)$ выпуклы при любых $x \in E^n$. Тогда на оптимальном управлении функция Гамильтона достигает максимального значения, т. е.

$$\begin{aligned} \max_{u(k) \in U} H(p^*(k+1), x^*(k), u(k)) = \\ = H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) \quad (k = 0, \dots, N-1), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где оптимальные значения x^* находятся из прямой системы (1.2.3) с начальным условием $x(0) = a$, а оптимальные значения p^* — из сопряженной системы (3.2.1) с граничным условием (3.1.2).

Задача по-прежнему считается не вырожденной, т. е.

$$p^*(N) = \frac{\partial \Phi(x^*(N))}{\partial x(N)} \neq 0.$$

Доказательство. В силу определения функции $H(p^*(k+1), x^*(k), u(k))$ теорема будет доказана, если будет установлено, что линейный функционал $(p^*(k+1), x(k+1))$ достигает (абсолютного) максимума на множестве $R_1(x^*(k))$ в точке $x^*(k+1)$. Это следует из выпуклости множества $R_1(x^*(k))$.

Действительно, допустим противное. Пусть существует точка $x(k+1) \in R_1(x^*(k))$, такая, что

$$(p^*(k+1), x(k+1)) > (p^*(k+1), x^*(k+1)),$$

или $(p^*(k+1), y(k+1)) > 0$, где $y(k+1) = x(k+1) - x^*(k+1)$.

Так как множество $R_1(x^*(k))$ выпуклое, то $\lambda x(k+1) + (1-\lambda)x^*(k+1) = x^*(k+1) + \lambda y(k+1) \in R_1(x^*(k))$ при всех λ , удовлетворяющих неравенству $0 \leq \lambda \leq 1$. Следовательно, $y(k+1) \in M_{k+1, k+1}(x^*(k+1))$ (см. доказательство теоремы 3.2.1 в § 3.3). Но, на основании леммы 3.3.3,

$$(p^*(k+1), y(k+1)) \leq 0.$$

Противоречие.

Таким образом, если множества $R_1(x) = f(x, U)$ выпуклы при любых x , то среди точек $u(k)$, «подозрительных» на оптимальность, следует рассматривать лишь ту, которая доставляет функции Гамильтона максимальное значение*), что позволяет в ряде случаев построить эффективные алгоритмы нахождения оптимального управления (см. гл. VI).

Проверка выпуклости множеств $R_1(x)$ в большинстве случаев не представляет труда. В частности, можно выделить класс задач, где эта проверка сводится к определению выпуклости множества U .

Теорема 2.2. Пусть процесс описывается уравнением вида

$$x(k+1) = f(x(k)) + B(x(k))u(k), \quad (2.2)$$

где $B(x(k))$ — матрицы размера $(r \times n)$, при ограничениях $u(k) \in U$, где U — выпуклое множество.

Тогда на оптимальном управлении справедливо равенство

$$\begin{aligned} \max_{u(k) \in U} (p^*(k+1), B(x^*(k))u(k)) &= (p^*(k+1), \\ B(x^*(k))u^*(k)) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1). \end{aligned}$$

Действительно, в этом случае множество $R_1(x) = f_1(x) + B(x)U$ будет выпуклым при выпуклом U (линейное преобразование переводит выпуклые множества в выпуклые), поэтому теорема 2.1 справедлива.

*) Заметим, что из этого вовсе не следует, что необходимые условия оптимальности теоремы 3.2.1 «слабее» условий теоремы 4.2.1. См. по этому поводу главу VI и § 6.14.

§ 3. Задача с суммарным показателем качества

Для задачи с суммарным показателем качества (задача 2 § 1.3) построим в расширенном пространстве состояний E^{n+1} множества достижимости $\tilde{R}_1(\tilde{x})$ за один шаг (см. § 1.4):

$$\tilde{R}_1(\tilde{x}) = \left\{ \tilde{z} = \{z_0, z\} \left| \begin{array}{l} z_0 = x_0 + f(x, u), \\ z = f(x, u), \end{array} \right. u \in U \right\}.$$

Здесь также, по аналогии с § 2, можно было бы потребовать выпуклость множеств $\tilde{R}_1(\tilde{x})$. Однако такое требование было бы слишком жестким. Например, линейные системы с выпуклым вверх показателем качества ему не удовлетворяют.

Однако здесь, очевидно, уже излишне требовать «полную» выпуклость множества $\tilde{R}_1(\tilde{x})$, поскольку максимум никогда не достигается на «нижней половине» множества $\tilde{R}_1(\tilde{x})$, а достаточно потребовать, чтобы была выпуклой только «верхняя часть» этого множества.

Поэтому, чтобы сформулировать принцип максимума в этом случае, рассмотрим множество (см. § 1.4)

$$\tilde{S}_1(\tilde{x}) = \left\{ \tilde{z} = \{z_0, z\} \left| \begin{array}{l} z_0 \leq x_0 + f(x, u), \\ z_0 = f(x, u), \end{array} \right. u \in U \right\}.$$

Теорема 3.1. Пусть множества $\tilde{S}_1(\tilde{x})$ выпуклы при любых $\tilde{x} = \{x_0, x\}$. Тогда на оптимальном управлении функция Гамильтона имеет максимальное значение

$$\begin{aligned} \max_{u(k) \in U} \tilde{H}(p^*(k+1), x^*(k), u(k)) = \\ = \tilde{H}(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где оптимальные значения p^* находятся из уравнений (3.1.9) при условии (3.1.10), а функция Гамильтона имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{H}(p(k+1), x(k), u(k)) = \\ = f_0(x(k), u(k) + (p(k+1), f(x(k), u(k))). \end{aligned}$$

Заметим, что из выпуклости множества $\tilde{S}_1(\tilde{x})$ следует выпуклость множества $\tilde{R}_1(\tilde{x})$ только в случае, ес-

ли функция $f_0(x, u)$ линейна по u . Однако из выпуклости множества $\tilde{S}_1(\tilde{x})$ всегда следует выпуклость множества $\tilde{R}_1(\tilde{x})$ в направлении $\tilde{e} = \{1, 0\}$ (в направлении положительной оси x_0).

С другой стороны, если потребовать, чтобы множество $\tilde{R}_1(\tilde{x})$ было только выпуклым в направлении $\tilde{e} = \{1, 0\}$, то это требование эквивалентно условию выпуклости $\tilde{S}_1(\tilde{x})$. Это непосредственно следует из построения множеств $\tilde{S}_1(\tilde{x})$ и $\tilde{R}_1(\tilde{x})$ и определения выпуклости по направлению (см. § 2.1).

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Прежде всего заметим, что так как функция $(\tilde{e}, \tilde{x}(N))$ в точке $\tilde{x}^*(N)$ достигает максимального значения на множестве $\tilde{S}_N(a)$ (см. § 1.4), то из доказательства теоремы 3.2.1 следует, что

$$(\tilde{p}^*(k+1), \delta \tilde{x}^*(k+1)) \leq 0 \quad (3.2)$$

для всех вариаций $\delta \tilde{x}^*(k+1) \in \tilde{M}_{k+1, k+1}(\tilde{x}^*(k+1))$, где $\tilde{M}_{k+1, k+1}(\tilde{x}^*(k+1)) \in E^{n+1}$ — конус допустимых вариаций по множеству $\tilde{S}_1(\tilde{x}^*(k))$ в точке $\tilde{x}^*(k+1) \in \tilde{S}_1(\tilde{x}^*(k+1))$ (см. 3.3.14), а $\tilde{p}^*(k+1)$ определено из (3.1.6), (3.1.7).

Повторяя теперь доказательство теоремы 2.1, получим, что из (3.2) и из выпуклости и замкнутости множества $\tilde{S}_1(\tilde{x}^*(k))$ следует, что

$$\max_{\tilde{x}(k+1) \in \tilde{S}_1(\tilde{x}^*(k))} (\tilde{p}^*(k+1), \tilde{x}(k+1)) = (\tilde{p}^*(k+1), \tilde{x}^*(k+1)).$$

Отсюда и из определения $\tilde{H}(\tilde{p}^*(k+1), \tilde{x}^*(k), u(k))$ следует (3.1).

Теорема доказана.

Очевидно, если множество U выпукло, а функция Гамильтона выпукла вверх по u при любых p и x , то она всегда имеет максимальное значение на оптимальном управлении. Это следует непосредственно из теоремы 3.2.1 (см. § 2.6), либо из теоремы 3.1, так как в этом случае, очевидно, множества $R_1(x)$ (или $\tilde{S}_1(\tilde{x})$) будут выпуклыми.

Рассмотрим частный случай задачи 2, когда это всегда так.

Пусть уравнения движения линейны по u и имеют вид (2.2):

$$x(k+1) = f(x(k)) + B(x(k))u(k),$$

а в показателе качества (1.3.2) функция $f_0(x, u)$ выпукла вверх по u . Множество U считается выпуклым.

Функция Гамильтона в этом случае имеет вид

$$H(p, x, u) = f_0(x, u) + (p, f(x)) + (p, B(x)u)$$

и, очевидно, выпукла по u при любых p и x , если выпукла функция $f_0(x, u)$.

Нетрудно видеть, что и множество $\tilde{S}_1(\tilde{x})$ будет выпуклым для этой задачи.

Таким образом, в рассматриваемом случае на оптимальном управлении всегда справедливо (3.1).

Однако условия выпуклости множества $\tilde{S}_1(\tilde{x})$ много шире и не сводятся к простой выпуклости функции Гамильтона.

Рассмотрим простейший пример первого порядка ($n=1, r=1$) с уравнениями движения $x(k+1) = f(x(k)) + g(u(k))$ и показателем качества $J = \sum_{k=0}^{N-1} [x^2(k) + g^2(u(k))]$, где $g(u)$ — полином ν -го порядка, $|u(k)| \leq u_1$.

Очевидно, множество $\tilde{S}_1(\tilde{x})$ выпукло при любых x ; следовательно, теорема 3.1 справедлива. С другой стороны, функция Гамильтона имеет вид

$$H(p, x, u) = x^2 + g^2(u) + pf(x) + pg(u).$$

Это — полином степени 2ν , который может иметь, вообще говоря, $2\nu - 1$ различных стационарных точек.

§ 4. Принцип квазимаксимума

Рассмотрим теперь первый подход в исследовании функции Гамильтона, о котором упоминалось в § 1. Для этого вернемся к доказательству теоремы 3.2.1 (§ 3.3) и исследуем поведение членов второго порядка малости. Пусть $\{u^*, x^*\}$ — оптимальный процесс в задаче 1.

Рассмотрим на k -м шаге специальную допустимую вариацию оптимального управления, положив

$$u(k) = u^*(k) + \Delta u^*(k) \in U, \quad \Delta u^*(j) = 0 \quad (j \neq k).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta x(k+1) &= f(x^*(k), u^*(k) + \Delta u^*(k)) - f(x^*(k), u^*(k)) = \\ &= \frac{\partial f(x^*(k), u^*(k))}{\partial u(k)} \Delta u^*(k) + o(|\Delta u^*(k)|), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \Delta x(s+1) &= f(x(s), u^*(s)) - f(x^*(s), u^*(s)) = \\ &= \frac{\partial f(x^*(s), u^*(s))}{\partial x(s)} \Delta x(s) + o(|\Delta x(s)|) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$(s = k+1, \dots, N-1).$$

Используя сопряженную систему (3.1.1) с граничным условием (3.1.2), получим, что

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(x^*(N)) &= \Phi(x(N)) - \Phi(x^*(N)) = \\ &= (p^*(k+1), \Delta x(k+1)) + \sum_{s=k+1}^N o(|\Delta x(s)|). \end{aligned}$$

Или окончательно

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(x^*(N)) &= H(p^*(k+1), x^*(k), u(k)) - \\ &- H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) + \sum_{s=k+1}^N o(|\Delta x(s)|). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Формула (4.3) дает возможность оценить зависимость приращения показателя качества от «больших» вариаций функции Гамильтона. При этом существенно, что рассматривается специальная вариация. Действительно, в случае если управление варьируется на каждом шаге, то формула (4.1) заменится на

$$\begin{aligned} \Delta x(k+1) &= \\ &= f(x^*(k) + \Delta x^*(k), u^*(k) + \Delta u^*(k)) - f(x^*(k), u^*(k)) = \\ &= f(x^*(k), u^*(k) + \Delta u^*(k)) - f(x^*(k), u^*(k)) + \\ &+ \frac{\partial f(x^*(k), u^*(k) + \Delta u^*(k))}{\partial x(k)} \Delta x^*(k) + o(|\Delta x^*(k)|), \end{aligned}$$

где $u^*(k) + \Delta u^*(k) \in U$, $x^*(k) + \Delta x^*(k) \in R_k(a)$.

Умножая обе части этого равенства скалярно на $p^*(k+1)$ (считая, что $\{p^*(k)\}$ удовлетворяют сопряженной системе (3.1.1) с граничным условием (3.1.2)) и прибавляя и отнимая в правой части выражение

$$\left(p^*(k+1), \frac{\partial f(x^*(k), u^*(k))}{\partial x(k)} \Delta x^*(k) \right) = (p^*(k), \Delta x^*(k)),$$

получим

$$\begin{aligned} (p^*(k+1), \Delta x^*(k+1)) - (p^*(k), \Delta x^*(k)) = \\ = \Delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) + \\ + \left(\frac{\partial H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k) + \Delta u^*(k))}{\partial x(k)} - \right. \\ \left. - \frac{\partial H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k))}{\partial x(k)} \right) \Delta x^*(k) + o(|\Delta x^*(k)|), \quad (4.4) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) = \\ = H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k) + \Delta u^*(k)) - \\ - H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)). \quad (4.5) \end{aligned}$$

Суммируя обе части (4.4) по k от 0 до $N-1$ и учитывая, что $\Delta x^*(0) = 0$, а

$$\Delta \Phi(x^*(N)) = (p^*(N), \Delta x^*(N)) + o(|\Delta x^*(N)|),$$

получим

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(x^*(N)) = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) + \\ + \sum_{k=1}^N o(|\Delta x^*(k)|) + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\partial H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k) + \Delta u^*(k))}{\partial x(k)} - \right. \\ \left. - \frac{\partial H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k))}{\partial x(k)} \right) \Delta x^*(k). \quad (4.6) \end{aligned}$$

Формула (4.6) обобщает (4.3) в случае, если управление варьируется на каждом шаге. При специальной вариации третий член в правой части (4.6), очевидно, тождественно равен нулю, а вторая сумма заменяется

на $\sum_{s=k+1}^N o(|\Delta x^*(s)|)$, т. е. (4.6) переходит в (4.3).

Исследуем теперь с помощью (4.3) или (4.6) поведение функции Гамильтона на оптимальном управлении.

Рассмотрим сначала два частных случая.

Пусть уравнения движения линейны по переменным состояния и имеют вид

$$x(k+1) = A(u(k))x(k) + \varphi(u(k)). \quad (4.7)$$

Здесь $A(u(k))$ — матрица размера $(n \times n)$.

Пусть показатель качества также линейен и имеет вид

$$J = (a(N), x(N)). \quad (4.8)$$

В силу линейности (4.7) по $x(k)$ $o(|\Delta x(k)|) = 0$ ($k=0, \dots, N-1$), в силу линейности (4.8) $o(|\Delta x(N)|) = 0$. Поэтому формула (4.3) переходит в следующую:

$$\Delta J^* = (a(N), \Delta x^*(N)) = \Delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)). \quad (4.9)$$

Так как $\Delta J^* \leq 0$ в силу оптимальности $x^*(N)$, то из (4.9), (4.5) следует, что

$$\begin{aligned} \max_{u(k) \in U} H(p^*(k+1), x^*(k), u(k)) = \\ = H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)), \end{aligned} \quad (4.10)$$

т. е. на оптимальном управлении выполняется принцип максимума.

Таким образом, справедлива

Теорема 4.1. Пусть процесс описывается уравнением вида (4.7) с показателем качества (4.8) и ограничениями

$$u(k) \in U \quad (k=0, 1, \dots, N-1). \quad (4.11)$$

Тогда на оптимальном управлении справедливо равенство (4.10), где оптимальные значения p^* находятся из системы

$$p^*(k) = A^T(u^*(k))p^*(k+1), \quad p^*(N) = a(N).$$

Подчеркнем, что здесь никаких предположений о выпуклости не делается; в частности, множество $R_1(x) = A(U)x + \varphi(U)$ может быть и невыпуклым.

Заметим также, что для рассматриваемой задачи принцип максимума (4.10) является только необходимым, но недостаточным условием оптимальности, как это может показаться из (4.9). Действительно, формула (4.9) справедлива только для специальных вариаций, в случае же произвольных допустимых вариаций из (4.10) еще не следует, что $\Delta J^* \leq 0$, так как нужно учитывать знак третьего члена в разложении (4.6).

Однако если уравнения движения имеют вид

$$x(k+1) = A(k)x(k) + \varphi(u(k)), \quad (4.12)$$

то, очевидно, и третий член выражения (4.6) исчезает, и эта формула принимает вид

$$\Delta J^* = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)). \quad (4.13)$$

Поэтому если в случае уравнений движения (4.12) для некоторого управления справедлив принцип максимума (4.10), т. е. $\Delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) \leq 0$ для любых $u(k) \in U$ ($k=0, \dots, N-1$), то из (4.13) следует, что $\Delta J^* \leq 0$, и это управление оптимально.

Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 4.2. Для того чтобы управление u^ было оптимальным в задаче с уравнением движения (4.12), показателем качества (4.8) и ограничениями (4.11), необходимо и достаточно, чтобы это управление удовлетворяло принципу максимума, т. е.*

$$\max_{u(k) \in U} (p^*(k+1), \varphi(u(k))) = (p^*(k+1), \varphi(u^*(k))), \quad (4.14)$$

где p^* находятся из

$$p^*(k) = A^T(k)p^*(k+1), \quad p^*(N) = a(N). \quad (4.15)$$

Отсюда видно, что оптимальное управление вычисляется непосредственно из (4.14), так как переменные p^* , определяемые из (4.15), зависят только от вектора $a(N)$:

$$p^*(k) = A^T(k)A^T(k+1) \dots A^T(N-1)a(N).$$

Заметим, что если рассмотреть задачу с суммарным показателем качества вида

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} [(a(u(k)), x(k)) + \varphi_0(u(k))]$$

и уравнениями движения (4.7), то для этой задачи принцип максимума всегда дает необходимые условия оптимальности, которые переходят в достаточные, если $a(u(k)) = a(k)$, $A(u(k)) = A(k)$.

Вернемся теперь к общему случаю уравнений движения (1.2.3) и показателя качества (1.3.1).

Введем в пространстве E^r множество

$$U_k(\delta) = \left\{ u(k) \left| \sum_{s=k+1}^{N-1} o(|\Delta x(s)|) \leq \delta \right. \right\}. \quad (4.16)$$

Из (4.3) следует, так как $\Delta J^* \leq 0$, что

$$\begin{aligned} H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) &\geq \\ &\geq H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) + \eta_k, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где $\eta_k = \sum_{s=k+1}^{N-1} o(|\Delta x(s)|)$, $u(k) \in U_k(\delta)$.

Так как $|\eta_k| \leq \delta$ для всех $u(k) \in U_k(\delta)$, то из (4.17) получим, что оптимальное управление удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) &\geq \\ &\geq H(p^*(k+1), x^*(k), u(k)) - \delta \end{aligned} \quad (4.18)$$

для всех $u(k) \in U_k(\delta)$.

Неравенство (4.18) выражает принцип квазимаксима (т. е. здесь принцип максимума выполняется с точностью до δ). Если $\delta = 0$, а $U_k(\delta) \equiv U$, то (4.18) переходит, очевидно, в «обычный» принцип максимума.

Объединяя неравенство (4.15) с условиями теоремы 3.2.1, получим следующие необходимые условия оптимальности, которые являются в каком-то смысле промежуточными между условиями теоремы 3.2.1 и теоремы 4.2.1.

Теорема 4.3. Пусть u^* — оптимальное управление в задаче 1. Тогда на оптимальном управлении справедливы соотношения:

$$\delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) \leq 0 \quad (4.19)$$

для всех $\delta u^*(k) \in \bar{K}(u^*(k))$,

$$H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) \geq H(p^*(k+1), x^*(k), u(k)) - \delta \quad (4.20)$$

для всех $u(k) \in U_k(\delta)$.

Неравенство (4.20) позволяет в принципе получить большую информацию о характере стационарных точек, выделяемых неравенством (4.19). Например, если функция Гамильтона имеет вид, показанный на рис. 4.4.1, где $U = \{u | \alpha \leq u \leq \beta\}$, то неравенство (4.20) выделяет область $\{u | \alpha_1 \leq u \leq \beta_1\}$, а неравенство (4.19) — точку u^* в этой области; следовательно, в данном случае функция Гамильтона на оптимальном управлении имеет максимальное значение (за-

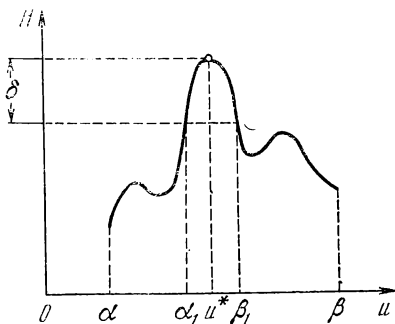


Рис. 4.4.1.

метим, что здесь предполагается, что при рассматриваемом δ область $U(\delta)$ включает U).

Однако использовать теорему 4.3 для вычисления оптимального управления трудно, поскольку в общем случае нет эффективных способов построения множеств $U_h(\delta)$.

§ 5. Условия одноэкстремальности

В этой главе и в главе III были получены необходимые условия оптимальности, сформулированные либо в терминах возможных направлений, либо в виде принципа максимума. Эти условия выделяют в общем случае несколько управлений, каждое из которых доставляет показателю качества стационарное значение.

Возникает вопрос, при каких условиях полученные необходимые условия оптимальности будут и достаточными, т. е. при каких условиях показатель качества $J(u)$ (как функция управления) будет иметь одноэкстремальное — максимальное — значение при заданных ограничениях на управление u .

Для того чтобы ответить на этот вопрос, введем множество допустимых управлений u , переводящих заданное начальное состояние $x(0) = a$ в некоторое конеч-

ное состояние $\bar{x}(N)$ за N шагов, которые обозначим через $\Omega_u(\bar{x}(N))$:

$$\Omega_u(\bar{x}(N)) = \left\{ u = \{u(0), \dots, u(N-1)\} \left| \begin{array}{l} x(k+1) = f(x(k), u(k)), \\ x(0) = a, x(N) = \bar{x}(N), \\ u(k) \in U(k=0, \dots, N-1) \end{array} \right. \right\}.$$

Очевидно, показатель качества $J = \Phi(x(N))$ имеет одно и то же значение для всех $u \in \Omega_u(x(N))$. В частности, $\Omega_u(x(N))$ может состоять из единственного управления u ; либо вообще может не существовать управления, переводящего $x(0) = a$ в $x(N)$, и тогда $\Omega_u(x(N))$ — пустое множество.

Рассмотрим задачу 1. Для нее справедлива следующая теорема, которая является непосредственным обобщением теоремы 2.6.1 для одношагового случая.

Теорема 5.1. Пусть функция $\Phi(x)$ выпукла вверх, множество достижимости $R_N(a)$ выпукло.

Тогда если условия теоремы 3.2.1 выполнены для любых управлений $u^* \in \Omega_u(x^*(N))$, то любое из этих управлений оптимальное.

Таким образом, в теореме 5.1 утверждается, что если

$$\delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) \leq 0$$

для всех $\delta u^*(k) \in \bar{K}(u^*(k))$ и всех $u^* \in \Omega_u(x^*(N))$, то при сделанных предположениях о выпуклости $R_N(a)$ все управления $u^* \in \Omega_u(x^*(N))$ оптимальные, т. е. $\Phi(x^*(N)) \geq \Phi(x(N))$ при любых $x(N) \in R_N(a)$.

Доказательство. Пусть некоторое управление u^* удовлетворяет условиям теоремы. Обозначим траекторию, соответствующую u^* при $x(0) = a$, через x^* . Покажем, что процесс $\{u^*, x^*\}$ оптимальный.

Для этого воспользуемся построениями и обозначениями § 3.3.

Фиксируем теперь конечное состояние $x^*(N) \in R_N(a)$, построим множества всех управлений $u^* \in \Omega_u(x^*(N))$ и всех соответствующих траекторий $x^* \in \Omega_x(x^*(N))$, переводящих $x(0) = a$ в $x^*(N)$ допустимым управлением за N шагов.

Обозначим через $M(x^*(N))$ конус допустимых вариаций в точке $x^*(N)$ по множеству $R_N(a)$. Очевидно, он будет состоять из всевозможных вариаций траекторий $x^* \in \Omega_x(x^*(N))$, которые возникли из-за допустимых вариаций управлений $u^* \in \Omega_u(x^*(N))$ при $k=0, \dots, N-1$, т. е.

$$M(x^*(N)) = \bigcup_{x^* \in \Omega_x} \bigcup_{k=1}^N M_{N,k}(x^*(k)). \quad (5.1)$$

Эта формула является непосредственным обобщением (3.3.10) на случай неединственных управлений u^* , переводящих $x(0)=a$ в $x^*(N)$.

По условиям теоремы

$$(p^*(k), \delta x^*(k)) \leq 0 \quad (5.2)$$

для всех $\delta x^*(k) \in M_{k,h}(x^*(k))$ и всех $x^* \in \Omega_x(x^*(N))$.

Так как на фиксированном процессе $(p^*(k), \delta x^*(k)) = \text{const}$ (см. лемму 1 § 3.3), то на основании (5.2) получим, что

$$(p^*(N), \delta x^*(N)) \leq 0$$

для любых $\delta x^*(N) \in M_{N,h}(x^*(N))$ и $x^* \in \Omega_x(x^*(N))$.

Иными словами, из условий теоремы следует, что гиперплоскость $(p^*(k), \delta x^*(k))$ пространства вариаций является опорной конусу $M_{k,h}(x^*(k))$ в его вершине. Осуществляя перенос этой гиперплоскости вдоль фиксированной траектории $x^* \in \Omega_x(x^*(N))$ в пространство δX_N (см. лемму 1 § 3.3), получим, что гиперплоскость $(p^*(N), \delta x^*(N)) = 0$ является опорной конусам $M_{N,h}(x^*(N))$ ($k=1, \dots, N$).

Так как подобный перенос можно осуществить для любой траектории x^* из $\Omega_x(x^*(N))$, то в итоге получим в силу (5.1), что эта гиперплоскость является опорной конусу $M(x^*(N))$ в его вершине, т. е. $(p^*(N), \delta x^*(N)) \leq 0$ для любых $\delta x^*(N) \in M(x^*(N))$.

Отсюда, используя доказательство теоремы 2.6.1, получим, что гиперплоскость $(p^*(N), x(N)) = (p^*(N), x^*(N))$ является опорной множеству $R_N(a)$ в точке $x^*(N)$, т. е.

$$\max_{x(N) \in R_N(a)} (p^*(N), x(N)) = (p^*(N), x^*(N)),$$

откуда следует в силу выпуклости множества $R_N(a)$, что функция $\Phi(x(N))$ достигает максимального значения на множестве $R_N(a)$ в точке $x^*(N)$, т. е.

$$\max_{x(N) \in R_N(a)} \Phi(x(N)) = \Phi(x^*(N)).$$

Теорема доказана.

Заметим, что так как в теореме не требовалось выпуклости множеств $R_1(x^*(k))$, то на оптимальном управлении не обязательно должен выполняться принцип максимума.

Однако если потребовать выпуклость множеств $R_k(x)$ при любых x для $k=1, \dots, N$, то, очевидно, условия теоремы 2.1 будут и достаточными, т. е. справедливо

Следствие. Пусть множества $R_k(x)$ выпуклы при любых x и $k=1, \dots, N$. Тогда если

$$\max_{u(k) \in U} H(p^*(k+1), x^*(k), u(k)) = H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) \\ (k=0, \dots, N-1)$$

для всех управлений u^ , переводящих $x(0)=a$ в $x^*(N)$, то любое из этих управлений оптимальное.*

Аналогичные условия имеют место и для задачи с суммарным показателем качества (здесь для одноэкстремальности достаточно потребовать выпуклость множества $\tilde{S}_N(a)$), и для задач с ограничениями на переменные состояния (где достаточно потребовать выпуклость $Q_N(a)$ и $\Phi(x(N))$).

Однако в общем случае проверка выпуклости множества достижимости за N шагов представляет трудную задачу. Это не касается линейных систем.

§ 6. Линейные системы

Рассмотрим дискретный процесс, который описывается линейным уравнением вида (см. § 1.5)

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad x(0) = a; \quad (6.1)$$

показатель качества пусть имеет вид

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x(k), u(k)), \quad (6.2)$$

где $f_0(x, u)$ — выпуклая вверх по u и x функция; предположим, что множество U в ограничениях

$$u(k) \in U \quad (k=0, 1, \dots, N-1) \quad (6.3)$$

также выпукло.

Для таких систем справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Для того чтобы в рассматриваемой задаче управление u^* было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы функции*

$$\begin{aligned} H(p^*(k+1), x^*(k), u(k)) = \\ = f_0(x^*(k), u(k)) + (p^*(k+1), B(k)u(k)) \end{aligned} \quad (6.4)$$

достигали максимального значения по $u(k) \in U$ при $k=0, 1, \dots, N-1$ на этом управлении, где значения $p^*(k)$ определены из системы

$$p^*(k) = \frac{\partial f_0(x^*(k), u^*(k))}{\partial x(k)} + A^T(k)p(k+1), \quad p^*(N) = 0.$$

З а м е ч а н и е. Эта же теорема справедлива и для уравнений

$$x(k+1) = A(k)x(k) + \varphi(u(k)) \quad (k=0, 1, \dots, N-1)$$

с произвольным множеством U , если потребовать, чтобы множество $\varphi(U)$ было выпуклым. Однако эта задача легко приводится к частному виду задачи (6.1) — (6.3), если положить $\varphi(u(k)) = v(k)$, $v(k) \in V$, $V = \varphi(U)$.

В этом случае $x(k+1) = A(k)x(k) + v(k)$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. На основании теории, развитой в § 5, для этого достаточно проверить выпуклость множеств $\tilde{R}_k(x)$ для этой задачи. Для простоты обозначений будем считать, что матрицы A и B не зависят от k .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала выпуклость множеств $\tilde{R}_1(\tilde{x})$:

$$\tilde{R}_1(\tilde{x}) = \left\{ z_0 \left| \begin{array}{l} z_0 \leq f_0(x, u) + x_0, \\ z = Ax + Bu, \end{array} \right. u \in U \right\}.$$

Пусть $\tilde{z}^1 = \{z_0^1, z^1\}$, $\tilde{z}^2 = \{z_0^2, z^2\}$ принадлежат $\tilde{R}_1(x)$. Имеем

$$\lambda z^1 + (1-\lambda)z^2 = Ax + B[\lambda u^1 + (1-\lambda)u^2] = Ax + Bu.$$

Но $u \in U$ при $0 \leq \lambda \leq 1$ в силу выпуклости U . Следовательно, $z = \lambda z^1 + (1 - \lambda) z^2 \in R_1(x)$ при $0 \leq \lambda \leq 1$ и множество $R_1(a)$ выпукло.

Далее, при $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\lambda z_0^1 + (1 - \lambda) z_0^2 \leq \lambda f_0(x, u^1) + \lambda x_0 + (1 - \lambda) f_0(x, u^2) + \\ + (1 - \lambda) x_0 \leq f_0(x, \lambda u^1 + (1 - \lambda) u^2) + x_0.$$

Последнее неравенство справедливо в силу выпуклости вверх по u функции $f_0(x, u)$. Отсюда следует выпуклость $\tilde{R}_1(\tilde{x})$.

Допустим теперь, что множество $\tilde{R}_{k-1}(\tilde{x})$ выпукло ($k > 2$), и пусть опять $\tilde{z}^1, \tilde{z}^2 \in \tilde{R}_k(\tilde{x})$.

Совершенно аналогично

$$z = A[\lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2] + B[\lambda u^1 + (1 - \lambda) u^2] \in R_k(x)$$

при $0 \leq \lambda \leq 1$ в силу выпуклости $R_{k-1}(x)$ и U , т. е. множество $R_k(a)$ выпукло.

Кроме того, по определению множества $\tilde{R}_k(a)$ и вследствие выпуклости вверх функции $f_0(x, u)$ по x и u

$$\lambda z_0^1 + (1 - \lambda) z_0^2 \leq \\ \leq \lambda f_0(x^1, u^1) + \lambda x_0^1 + (1 - \lambda) f_0(x^2, u^2) + (1 - \lambda) x_0^2 \leq \\ \leq f_0[\lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2, \lambda u^1 + (1 - \lambda) u^2] + \lambda z_0^1 + (1 - \lambda) z_0^2.$$

Таким образом, множество $\tilde{R}_k(x)$ выпукло, и, следовательно, выпуклы все множества $\tilde{R}_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, N$).

Наконец, ясно, что если (6.4) справедливо для некоторого управления u^* , переводящего $x(0) = a$ в $x^*(N)$, то оно верно и для любого другого управления, переводящего $x(0) = a$ в ту же точку. Отсюда уже следует утверждение теоремы.

Заметим, что теорему 6.1 можно доказать и непосредственно, представляя показатель качества (6.2) как неявную функцию управления $J = J(x(0, u))$, заданную посредством соотношений (6.1), (6.2) на выпуклых ограничениях (6.3).

Так как каждое состояние $x(k)$, в силу уравнений (6.1), есть линейная комбинация управляющих воздействий $u(k)$ (см. (3.4.3)), а выпуклая функция $f_0(x(k), u(k))$ от линейной комбинации $u(0), \dots, u(k-1)$

остается выпуклой функцией по этим переменным, то следовательно, $J(x(0), u)$ — выпуклая функция по u при каждом начальном состоянии $x(0)$. Тогда из теоремы 2.6.1 непосредственно следует одноэкстремальность рассматриваемой задачи.

Рассмотрим простой пример.

Пусть в системе уравнений $r=1$, т. е. $u(k)$ — скаляры, а показатель качества, который нужно минимизировать, имеет вид

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (x(k), x(k)) + \frac{1}{2} \gamma \sum_{k=0}^{N-1} u^2(k),$$

где $\gamma > 0$ и $|u(k)| \leq 1$. Условия теоремы 6.1 здесь выполнены, поэтому для такой задачи следующие условия полностью определяют оптимальный процесс:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k), & x(0) &= a, \\ p(k) &= x(k) + A^T(k)p(k+1), & p(N) &= x(N), \end{aligned}$$

$$u(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha(k) \geq 1, \\ \alpha(k), & \text{если } |\alpha(k)| < 1, \\ -1, & \text{если } \alpha(k) \leq -1, \end{cases}$$

где $\alpha(k) = \gamma(p(k+1), b)$.

На примере статической задачи в главе II было показано, какую важную роль играет теория двойственности при исследовании экстремальных задач.

В этой главе развивается теория двойственности динамических задач, с помощью которой строятся «двойственные» условия оптимальности для задач с ограничениями на переменные состояния, а в последующей главе — двойственные вычислительные методы и оценки для оптимального процесса.

§ 1. Двойственные задачи управления

Рассмотрим, как и раньше, сначала задачу оптимизации конечного состояния (задачу 1): требуется найти такое управление и траекторию x , удовлетворяющие ограничениям:

$$x(k) \in X_k \quad (k=0, \dots, N), \quad (1.1)$$

$$u(k) \in U_k \quad (k=0, \dots, N-1) \quad (1.2)$$

или, в частном случае,

$$h_j(k, x(k)) \geq 0 \quad (j=1, \dots, s(k); k=0, \dots, N), \quad (1.1a)$$

$$g_j(k, u(k)) \geq 0 \quad (j=1, \dots, m(k); k=0, \dots, N-1) \quad (1.2a)$$

и доставляющие показателю качества

$$J = \Phi(x(N)) \quad (1.3)$$

максимальное значение в силу уравнений движения $x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \quad (k=0, 1, \dots, N-1)$. (1.4)

Отметим, что здесь начальное состояние не фиксировано. В этом параграфе будем считать, что функции

$\Phi(x)$, $f(x, u)$ непрерывны по своим аргументам, а множества U_k и X_k замкнуты и ограничены. Кроме того, будем предполагать, что ограничения (1.1) и (1.2) таковы, что существует хотя бы одно управление u и соответствующая ему в силу уравнений движения (1.4) траектория x , которые удовлетворяют этим ограничениям. При таких предположениях, как показано в главе I, оптимальное управление всегда существует, а соответствующее ему значение показателя качества (1.3) конечно.

В главе III задача дискретного управления рассматривалась как задача оптимизации по управлению u функции $J(x(0), u)$, заданной в неявном виде посредством уравнений движения (1.4), при ограничениях на управляющие воздействия $u(k)$, заданные в явном (1.2) и неявном (1.1) виде.

Но эту же задачу дискретного управления можно рассматривать как задачу Лагранжа на условный экстремум, в котором независимыми переменными являются переменные управления $u(k)$ и состояния $x(k)$, связанные между собой ограничениями типа равенств (1.4) и неравенств (1.1a), (1.2a), а оптимизируемой функцией является показатель качества (1.3). Поэтому в рассматриваемой задаче можно использовать аппарат, о котором говорилось в §§ 7—10 главы II.

Введем функцию Лагранжа

$$F(u, x, p) = \Phi(x(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} (p(k+1), x(k+1) - f(x(k), u(k), k)), \quad (1.5)$$

где $p(k) = \{p_1(k), \dots, p_n(k)\} \in E^n$ — вектор множителей Лагранжа, и

$$\begin{aligned} u &= \{u(0), \dots, u(N-1)\}, \\ x &= \{x(0), \dots, x(N)\}, \\ p &= \{p(0), \dots, p(N)\}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\Omega(u)$, $\Omega(x)$, $\Omega(p)$ множества допустимых последовательностей u , p и x . Очевидно, $\Omega(u) = \prod_{k=0}^{N-1} U_k$, $\Omega(x) = \prod_{k=0}^N X_k$, $\Omega(p)$ — прямое произведение $(N+1)$ евклидовых пространств E^n .

Используя функцию Лагранжа, построим функции

$$\varphi(u, x) = \min_p F(u, x, p), \quad (1.6)$$

где минимум берется по всем $p \in \Omega(p)$, и

$$\psi(p) = \max_{u, x} F(u, x, p), \quad (1.7)$$

где максимум берется по любым парам $u \in \Omega(u)$, $x \in \Omega(x)$, не обязательно удовлетворяющим уравнениям движения (1.4).

Заметим, что так как функция $F(u, x, p)$ непрерывна по своим аргументам, а множества $\Omega(u)$, $\Omega(x)$ ограничены и замкнуты, то $\psi(p)$ — непрерывная функция на $\Omega(p)$. Что касается функции $\varphi(u, x)$, то она равна значению показателя качества $\Phi(x(N))$ в области допустимых u, x (т. е. на множестве Q_N , где Q_N — множество допустимых состояний на шаге $N - m$) и равна $-\infty$ в остальных точках.

Рассмотрим теперь следующие задачи.

Задача 1P. Требуется найти последовательности u и x , удовлетворяющие ограничениям (1.1) и (1.2), при которых функция $\varphi(u, x)$ принимает наибольшее значение, т. е. при которых

$$\max_{u, x} \varphi(u, x) = \max_{u, x} \min_p F(u, x, p) = \omega_P. \quad (1.8)$$

Задача 1D. Требуется найти последовательность p , при которой функция $\psi(p)$ имеет наименьшее значение, т. е.

$$\min_p \psi(p) = \min_p \max_{u, x} F(u, x, p) = \omega_D. \quad (1.9)$$

В развернутой форме эти задачи имеют вид:

Задача 1P. Найти последовательности $u(k)$ ($k = 0, \dots, N-1$) и $x(k)$ ($k = 0, \dots, N$), при которых

$$\max_{u, x} \min_p \left[\Phi(x(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} (p(k+1), x(k+1) - f(x(k), u(k), k)) \right] = \omega_P, \quad (1.10)$$

где

$$\begin{aligned} h_j(k, x(k)) &\geq 0 & (j=1, \dots, s(k)), \\ g_j(k, u(k)) &\geq 0 & (j=1, \dots, m(k)). \end{aligned}$$

Задача 1D. Найти последовательность $p(k)$ ($k=0, \dots, N$), при которой

$$\min_p \max_{u, x} \left[\Phi(x(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} (p(k+1), x(k+1)) - \right. \\ \left. - f(x(k), u(k), k) \right] = \omega_D, \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} h_j(k, x(k)) &\geq 0 & (j=1, \dots, s(k)), \\ g_j(k, u(k)) &\geq 0 & (j=1, \dots, m(k)). \end{aligned}$$

Назовем, пока формально, задачи 1P и 1D *парой двойственных задач* (из которых задача 1P — *прямая*, а задача 1D — *двойственная* ей). Изучим каждую из задач в отдельности.

Пусть $\{u^*, x^*\}$ — решение исходной задачи 1, $J^* = \Phi(x^*(N))$ — соответствующее значение показателя качества. При сделанных предположениях оно всегда существует.

Теорема 1.1. *Любое решение $\{u^*, x^*\}$ задачи 1 является решением задачи 1P и, наоборот, любое решение задачи 1P является решением задачи 1, причем $J^* = \omega_P$.*

Доказательство. Из определения функции $\varphi(u, x)$ следует, что $\varphi(u, x) = \Phi(x(N))$, если u и x удовлетворяют уравнениям движения (1.4), и $\varphi(u, x) = -\infty$, если u и x им не удовлетворяют.

Пусть $\{u^*, x^*\}$ — решение задачи 1. Следовательно, $x^*(k+1) = f(x^*(k), u^*(k), k)$ ($k=0, 1, \dots, N-1$) и выполнены ограничения (1.1), (1.2). Поэтому

$$J^* = \max_u \Phi(x(N)) = \max_{u, x} \varphi(u, x) = \omega_P.$$

Пусть теперь $\{u, x\}$ — решение задачи 1P. Очевидно, это решение должно удовлетворять уравнениям движения (1.4), так как в противном случае $\max_{u, x} \varphi(u, x) = -\infty$. По предположению, такие u и x существуют. Но тогда опять $\omega_P = \max_{u, x} \varphi(u, x) = \max_u \Phi(x(N)) = J^*$.

Таким образом, прямая задача $1P$ является некоторой переформулировкой исходной задачи 1 .

Изучим теперь двойственную задачу $1D$.

Обозначим через Γ множество последовательностей p , при которых функция $\psi(p)$, определенная из (1.7), имеет конечное значение (т. е. $\psi(p) < \infty$ при $p \in \Gamma$).

Покажем, что Γ — выпуклое множество, а $\psi(p)$ — выпуклая функция.

Действительно, пусть p^1 и p^2 — некоторые последовательности из Γ . Тогда при $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\begin{aligned} \psi(\lambda p^1 + (1 - \lambda) p^2) &= \\ &= \max_{u, x} [\lambda F(u, x, p^1) + (1 - \lambda) F(u, x, p^2)] \leq \\ &\leq \lambda \max_{u, x} F(u, x, p^1) + (1 - \lambda) \max_{u, x} F(u, x, p^2) = \\ &= \lambda \psi(p^1) + (1 - \lambda) \psi(p^2). \end{aligned}$$

Так как $\psi(p^1) < \infty$ и $\psi(p^2) < \infty$, то $\psi(p) < \infty$, где $p = \lambda p^1 + (1 - \lambda) p^2$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), и, следовательно, $p \in \Gamma$. Таким образом, Γ — выпуклое множество. Кроме того, так как $\psi(\lambda p^1 + (1 - \lambda) p^2) \leq \lambda \psi(p^1) + (1 - \lambda) \psi(p^2)$ при $0 \leq \lambda \leq 1$, то $\psi(p)$ — выпуклая функция.

Итак, двойственная задача (задача $1D$) — всегда задача выпуклого программирования, а функция $\psi(p)$ имеет одно экстремальное значение, равное ω_D .

Построение же самой функции $\psi(p)$, определенной из (1.7), в общем случае, естественно, уже не является задачей выпуклого программирования.

§ 2. Соотношения двойственности

В этом параграфе изучим соотношения между задачами $1P$ и $1D$.

Теорема 2.1. Справедливо неравенство

$$\omega_P \leq \omega_D. \quad (2.1)$$

Доказательство. По определению, при любых $p \in \Omega(p)$

$$\psi(p) = \max_{u, x} F(u, x, p) \geq F(u, x, p),$$

где $u \in \Omega(u)$, $x \in \Omega(x)$, $p \in \Omega(p)$.

В частности,

$$\omega_D = \min_p \psi(p) \geq \min_p F(u, x, p) = \varphi(u, x)$$

при любых $u \in \Omega(u)$, $x \in \Omega(x)$.

Отсюда следует, что

$$\omega_D = \min_p \psi(p) \geq \max_{u, x} \varphi(u, x) = \omega_P.$$

Очевидно, неравенство (2.1) можно было бы и не доказывать, а применить соотношение (2.8.5), полученное для статической задачи.

Так как задачи 1 и 1P эквивалентны, то в итоге получаем, что оптимальное значение показателя качества J^* исходной задачи 1 всегда не превосходит оптимального значения ω_D функционала двойственной задачи 1D.

Полученное соотношение позволяет строить оценки сверху для оптимального решения исходной задачи (см. § 6.1).

Неравенство (2.1) справедливо для двойственных задач произвольного вида. Если же исходная задача является одноэкстремальной, то неравенство (2.1) переходит в равенство.

Покажем это. Будем предполагать выполненными следующие условия.

1. Множества U_k ($k=0, 1, \dots, N-1$), X_k ($k=0, 1, \dots, N$) выпуклы, замкнуты и ограничены.

2. Уравнения движения линейны и имеют вид

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \quad (k=0, 1, \dots, N-1), \quad (2.2)$$

где $A(k) = [a_{ij}(k)]$, $B(k) = [b_{sj}(k)]$ ($i, j=1, \dots, n$; $s=1, \dots, r$) — матрицы размера $(n \times n)$, $(r \times n)$ соответственно.

3. Ограничения (1.1), (1.2) и уравнения движения (2.2) таковы, что существует хотя бы одна траектория удовлетворяющая (1.1), (1.2) и (2.2), каждое состояние $x(k)$ которой находится строго внутри множества X_k , т. е. при ограничениях (1.1 а)

$$h_j(k, \bar{x}(k)) > 0 \quad (j=1, \dots, s(k); k=0, \dots, N).$$

Очевидно, для выполнения 3 необходимо, чтобы множества X_k имели внутренние точки.

4. Показатель качества $\Phi(x(N))$ — выпуклая вверх функция конечного состояния.

Заметим, что при сделанных предположениях рассматриваемая задача является задачей выпуклого программирования и, следовательно, одноэкстремальной (см. замечание в § 4.6 *).

Теорема 2.2. Если выполнены условия 1—4, то для любых оптимальных решений прямой и двойственной задач $1P$ и $1D$ имеет место равенство

$$\omega_P = \omega_D = J^*,$$

где оптимальные значения функционалов прямой и двойственной задач $\omega_P = \omega_D$ достигаются на некотором процессе $\{u^*, x^*, p^*\}$, удовлетворяющем (1.1), (1.2).

Доказательство. Так как в теореме 2.1 утверждается, что всегда $\omega_P \leq \omega_D$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что в случае одноэкстремальности справедливо и обратное неравенство: $\omega_P \geq \omega_D$. Для доказательства этого неравенства прежде всего построим множества достигаемости $Q_k \subset E^n$ для этой задачи:

$$Q_1 = f(x_0, U_0, 0) \cap X_1, \quad Q_{k+1} = f(Q_k, U_k, k) \cap X_{k+1} \\ (k=1, \dots, N-1),$$

или

$$Q_k = R_k \cap X_k \quad (k=1, \dots, N),$$

где $R_1 = f(x_0, U_0, 0)$, $R_{k+1} = f(Q_k, X_k, k)$.

Заметим, что Q_k ($k=1, \dots, N$) — выпуклые множества. Действительно, множество $R_1 = A(0)X_0 + B(0)U_0$, являющееся образом линейного преобразования выпуклых множеств $U_0 \times X_0$, очевидно, выпуклое. Так как пересечение выпуклых множеств выпукло, то $Q_1 = R_1 \cap X_1$ — выпуклое множество. Аналогично доказывается выпуклость множеств Q_k при $k=2, \dots, N$.

Кроме того, заметим, что из предположения 3 следует, что множества X_k имеют внутренние точки, общие с R_k .

Очевидно,

$$\max_{x(N) \in Q_N} \Phi(x(N)) = \Phi(x^*(N)).$$

*) См. также доказательство теоремы 2.2.

Обозначим

$$S(N) = \Phi(x^*(N)) = \omega_P.$$

Пусть

$$z(N) = x(N) - f(x(N-1), u(N-1), N-1),$$

где $x(N) \in X_N$, $x(N-1) \in Q_{N-1}$, $u(N-1) \in U_{N-1}$.

Совокупность векторов $z(N)$ определяет возможные невязки в состоянии процесса на N -м шаге (между допустимыми $x(N) \in X_N$ и возможными $y(N) \in R_N$ состояниями на N -м шаге).

Рассмотрим в расширенном пространстве состояний E^{n+1} множество

$$\tilde{Z}_N = \left\{ \begin{array}{l} z_0(N) \mid z_0(N) \leq \Phi(x(N)), \\ z(N) \mid z(N) = x(N) - f(x(N-1), u(N-1), N-1) \end{array} \right\}$$

для некоторых $x(N) \in X_N$, $x(N-1) \in Q_{N-1}$, $u(N-1) \in U_{N-1}$ и луч

$$\tilde{L}_N = \left\{ \begin{array}{l} z_0(N) \mid z_0(N) > S(N), \\ z(N) \mid z(N) = 0 \end{array} \right\}.$$

Так как преобразование f линейно по x и u , а множества Q_{N-1} , U_{N-1} и функция $\Phi(x)$ выпуклы, то $\tilde{Z}_N$ — выпуклое множество.

Действительно, пусть $\tilde{z}^1(N)$, $\tilde{z}^2(N) \in \tilde{Z}_N$. Рассмотрим точку

$$\tilde{z}(N) = \lambda \tilde{z}^1(N) + (1 - \lambda) \tilde{z}^2(N) \text{ при } 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (2.3)$$

По определению,

$$\begin{aligned} z(N) &= \lambda z^1(N) + (1 - \lambda) z^2(N) = \\ &= \lambda [x^1(N) - A(N-1)x^1(N-1) - B(N-1)u^1(N-1)] + \\ &+ (1 - \lambda) [x^2(N) - A(N-1)x^2(N-1) - B(N-1)u^2(N-1)] = \\ &= x(N) - A(N-1)x(N-1) - B(N-1)u(N-1), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} x(N-1) &= \lambda x^1(N-1) + (1 - \lambda) x^2(N-1), \\ x^1(N-1), x^2(N-1) &\in Q_{N-1}, \\ x(N) &= \lambda x^1(N) + (1 - \lambda) x^2(N), \quad x^1(N), x^2(N) \in X_N, \\ u(N-1) &= \lambda u^1(N-1) + (1 - \lambda) u^2(N-1), \\ u^1(N-1), u^2(N-1) &\in U_{N-1}. \end{aligned}$$

Так как Q_{N-1} , X_N , U_{N-1} — выпуклые множества, то
 $x(N-1) \in X_{N-1}$, $u(N-1) \in U_{N-1}$, $x(N) \in X_N$

при $0 \leq \lambda \leq 1$.

Кроме того,

$$z_0(N) = \lambda z_0^1(N) + (1 - \lambda) z_0^2(N) \leq \\ \leq \lambda \Phi(x^1(N)) + (1 - \lambda) \Phi(x^2(N)).$$

В силу выпуклости $\Phi(x(N))$

$$z_0(N) \leq \Phi[\lambda x^1(N) + (1 - \lambda)x^2(N)] = \Phi(x(N)).$$

Таким образом, точка $\tilde{z}(N)$, определенная из (2.3), принадлежит множеству $\tilde{Z}_N$ и, следовательно, оно выпуклое.

Множество $\tilde{L}_N$ (луч) также выпукло.

Кроме того, очевидно, что множества $\tilde{Z}_N$ и $\tilde{L}_N$ не имеют общих точек. Поэтому к этим множествам можно применить теорему об отделимости выпуклых множеств (§ 2.1).

В результате получим, что существует такой ненулевой вектор $\tilde{p}(N) \in E^{n+1}$, определяющий нормаль разделяющей гиперплоскости, что

$$p_0(N) \Phi(x(N)) - (p(N), x(N) - f(x(N-1), \\ u(N-1), N-1)) \leq p_0(N) S(N).$$

для любых $x(N) \in X_N$, $x(N-1) \in Q_{N-1}$, $u(N-1) \in U_{N-1}$.

Покажем, что $p_0(N) \neq 0$.

Действительно, допустим противное: $p_0(N) = 0$.

Тогда

$$(p(N), x(N) - f(x(N-1), u(N-1), N-1)) \geq 0,$$

или

$$(p(N), x(N)) \geq (p(N), y(N)),$$

где $x(N) \in X_N$, $y(N) \in R_N$, т. е. существует гиперплоскость, разделяющая, хотя бы и не строго, выпуклые множества X_N и R_N .

Однако, по предложению 3, существует хотя бы одна точка $y(N) \in R_N$, являющаяся внутренней точкой множества X_N . Противоречие.

Итак, доказано, что

$\Phi(x(N)) -$

$$-(p(N), x(N) - f(x(N-1), u(N-1), N-1)) \leq S(N)$$

для любых $x(N) \in X_N$, $x(N-1) \in Q_{N-1}$, $u(N-1) \in U_{N-1}$.

В частности,

$$\begin{aligned} & \max_{u(N-1) \in U_{N-1}} \max_{x(N-1) \in Q_{N-1}} \max_{x(N) \in X_N} [\Phi(x(N)) - \\ & -(p(N), x(N) - f(x(N-1), u(N-1), N-1))] \leq S(N). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Обозначим через $S(N-1)$ левую часть неравенства (2.4). Таким образом, $S(N-1) \leq S(N)$.

Рассмотрим теперь в E^{n+1} множество

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{N-1} = & \left\{ z_0(N-1) \mid z_0(N-1) \leq \right. \\ & \left. \leq \Phi(x(N)) - (p(N), x(N) - f(x(N-1), u(N-1), N-1)), \right\} \\ & = x(N-1) - f(x(N-2), u(N-2), N-2) \end{aligned}$$

для некоторых $x(N) \in X_N$, $x(N-1) \in X_{N-1}$, $u(N-1) \in U_{N-1}$, $u(N-2) \in U_{N-2}$, $x(N-2) \in Q_{N-2}$ и луч

$$\tilde{Z}_{N-1} = \left\{ z_0(N-1) \mid z_0(N-1) > S(N-1), \right\}.$$

Повторяя рассуждения для этого случая, получим, что $\tilde{Z}_{N-1}$ и $\tilde{L}_{N-1}$ — выпуклые множества в E^{n+1} , не имеющие общих точек.

Поэтому существует ненулевой вектор $\tilde{p}(N-1) \in E^{n+1}$, определяющий нормаль гиперплоскости, разделяющей множества $\tilde{Z}_{N-1}$ и $\tilde{L}_{N-1}$, т. е.

$$\begin{aligned} & p_0(N-1) [\Phi(x(N)) - (p(N), x(N) - \\ & - f(x(N-1), u(N-1), N-1))] - \\ & -(p(N-1), x(N-1) - f(x(N-2), u(N-2), N-2)) \leq \\ & \leq p_0(N-1) S(N-1), \end{aligned}$$

для любых $x(N) \in X_N$, $x(N-1) \in X_{N-1}$, $u(N-1) \in U_{N-1}$, $x(N-2) \in Q_{N-2}$.

Аналогичным образом из того, что множество X_{N-1} имеет внутреннюю точку, общую с R_{N-1} , следует, что $p_0(N-1) \neq 0$.

Повторяя эти рассуждения для последующих шагов, получим неравенство

$$\Phi(x(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} (p(k+1), x(k+1) - f(x(k), u(k), k)) \leq \leq \Phi(x^*(N)) = \omega_P$$

при любых $x(k) \in X_k$ ($k=0, \dots, N$), $u(k) \in U_k$ ($k=0, \dots, N-1$). Или, учитывая определение функции Лагранжа (1.5), $F(u, x, p) \leq \omega_P$, при любых $u \in \Omega(u)$, $x \in \Omega(x)$ и $p \in \Omega(p)$. В частности,

$$\psi(p) = \max_{u \in \Omega(u)} \max_{x \in \Omega(x)} F(u, x, p) \leq \omega_P.$$

Но, по определению ω_D ,

$$\omega_D = \min_p \psi(p) \leq \psi(p)$$

при любых $p \in \Omega(p)$.

Итак, доказано, что $\omega_D \leq \omega_P$, откуда, с учетом теоремы 2.1, получаем окончательно, что $\omega_P = \omega_D$.

Теорема полностью доказана.

Таким образом, решение исходной задачи, если она имеет один экстремум, может быть заменено решением задачи, ей двойственной, которое во многих случаях оказывается проще, чем решение прямой задачи. Кроме того, двойственной задаче всегда можно дать интерпретацию, связанную с физическим содержанием рассматриваемой задачи (см., например, §§ 6.9, 6.10), аналогично тому, как это делается в одношаговых задачах оптимизации. Поэтому часто совместное решение прямой и двойственной задач полезно не только с вычислительной точки зрения, но и для понимания физики конкретной задачи управления.

Рассуждения §§1, 2 допускают некоторые обобщения.

1) Из построения задач $1P$ и $1D$ видно, что полученные результаты останутся верными, если «независимые» ограничения (1.1), (1.2) на переменные $x(k)$ и $u(k)$ заменить совместным вида

$$g_j(k, x(k), u(k)) \geq 0 \quad (j=1, \dots, m(k)), \quad (2.5).$$

где $g_j(\cdot)$ — некоторые непрерывные функции, выделяющие в пространстве $X_k \times U_k$ ограниченное и непустое множество. При этом легко видеть, что для того, чтобы была справедлива теорема 2.2, нужно заменить условие 1 требованием выпуклости вверх этих функций по переменным u и x , а условие 3 — требованием существования такого допустимого процесса $\{\bar{u}, \bar{x}\}$, удовлетворяющего ограничениям (2.5) и уравнениям движения (2.2), при котором

$$g_j(k, \bar{u}(k), \bar{x}(k)) > 0 \\ j (= 1, \dots, m(k); k = 0, \dots, N-1).$$

2) При доказательстве теоремы 2.2 использовалась, по существу, выпуклость множеств достижимости Q_k ($k=1, \dots, N$), а не линейность уравнений движения. Поэтому теорема 2.2 будет верна и в нелинейном случае, если условия 1,2 заменить требованием выпуклости множеств достижимости Q_k ($k=1, \dots, N$).

Или если учесть замечание 1, в формулировке теоремы 2.2 условия 1,2 можно заменить требованием выпуклости и ограниченности множеств достижимости для ограничений вида (2.5).

3) В приведенных построениях требовалась ограниченность множеств X_k (а, в конечном счете, множеств достижимости). Поэтому случай отсутствия ограничений на переменные состояния, когда $X_k = E^n$, формально здесь не проходит. Однако поскольку в книге рассматриваются процессы, описываемые уравнениями с непрерывными правыми частями, множества достижимости R_k всегда будут ограничены, если ограничены управляющие воздействия (что выполняется для любых практических случаев). Положив формально $X_k = R_k$, получим, что утверждения §§ 1,2 справедливы и для случая отсутствия ограничений на переменные состояния.

§ 3. Седловая точка и оптимальность

Из теоремы 2.2 следует, что

$$\max_{u, x} \min_p F(u, x, p) = \min_p \max_{u, x} F(u, x, p) = F(u^*, x^*, p^*), \quad (3.1)$$

или

$$F(u, x, p^*) \leq F(u^*, x^*, p^*) \leq F(u^*, x^*, p) \quad (3.2)$$

для любых $u \in \Omega(u)$, $x \in \Omega(x)$, $p \in \Omega(p)$.

Таким образом, функция Лагранжа (1.5) имеет седловую точку $\{u^*, x^*, p^*\}$ в $\Omega(u) \times \Omega(x) \times \Omega(p)$ (см. § 2.8), на которой достигаются оптимальные решения прямой и двойственной задач.

Поэтому теоремы 2.1, 2.2 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 3.1. Пусть $\{u^*, x^*, p^*\}$ — седловая точка функции Лагранжа (1.5) в $\Omega(u) \times \Omega(x) \times \Omega(p)$, т. е. выполнены соотношения (3.2) или (3.1).

Тогда процесс $\{u^*, x^*\}$ является оптимальным для исходной задачи 1.

Пусть, обратно, $\{u^*, x^*\}$ — решение задачи 1, и пусть, кроме того, выполнены условия 1—4 теоремы 2.2.

Тогда существует такая последовательность p^* ($p^* = 0$), что $\{u^*, x^*, p^*\}$ образуют седловую точку функции Лагранжа $F(u, x, p)$ в $\Omega(u) \times \Omega(x) \times \Omega(p)$.

Доказательство. Выпишем правую часть неравенства (3.2):

$$\begin{aligned} \Phi(x^*(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} (p^*(k+1) - f(x^*(k), u^*(k), k)) &\leq \\ &\leq \Phi(x^*(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} (p^*(k+1), x^*(k+1) - \\ &\quad - f(x^*(k), u^*(k), k)). \end{aligned}$$

Это неравенство верно при любых $p(k)$ ($k=0, \dots, N$). Следовательно, должно быть

$$x^*(k+1) = f(x^*(k), u^*(k), k),$$

т. е. в седловой точке выполнены уравнения движения (1.4). Далее, из левой части неравенств (3.2) получим $\Phi(x(N)) \leq \Phi(x^*(N))$ для любых $\{u, x\}$, удовлетворяющих (1.1), (1.2) и (1.4), т. е. для любых $x(N) \in Q_N$. Тем самым оптимальность процесса $\{u^*, x^*\}$ установлена и первая часть теоремы доказана. Заметим, что здесь не использовались требования одноэкстремальности задачи 1.

Что касается второй части, то ввиду (1.10), (1.11) и (3.1) она является простой переформулировкой теоремы 2.2.

Таким образом, вместо пары двойственных задач $1P$ и $1D$ можно рассмотреть одну общую задачу.

Задача $1PD$. Найти седловую точку (если она существует) функции Лагранжа

$$F(u, x, p) = \Phi(x(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} (p(k+1), x(k+1) - f(x(k), u(k), k))$$

при $u(k) \in U_k, x(k) \in X_k$.

Заметим, что условия 1—4 теоремы 2.2 гарантируют существование седловой точки $F(u, x, p)$, а теорема 3.1 показывает, что решение задач $1P$, $1D$ и $1PD$ эквивалентно при этих условиях решению исходной задачи 1.

§ 4. Задача с суммарным показателем качества

Аналогичные соотношения можно получить и для задачи с суммарным показателем качества. Рассмотрим задачу (задачу 2): требуется найти такое управление u и соответствующую ему траекторию x , удовлетворяющие ограничениям

$$g_j(k, u(k), x(k)) \geq 0 \quad (j=1, \dots, m(k); k=0, \dots, N-1) \quad (4.1)$$

и доставляющие показателю качества

$$J = \Phi(x(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x(k), u(k), k) \quad (4.2)$$

максимальное значение в силу уравнений движения

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k). \quad (4.3)$$

Так же, как и в §§ 1—3, будем предполагать, что функции $g_j(k, x, u)$ ($j=1, \dots, m(k); k=0, \dots, N-1$), $f_i(x, u, k)$ ($i=0, \dots, n$) непрерывны по своим аргументам, а неравенства (4.1) выделяют ограниченные замкнутые множества $R_k \subset X_k \times U_k$. Кроме того, предполагается суще-

ствование хотя бы одного допустимого процесса $\{u, x\}$, удовлетворяющего (4.1), (4.3).

Функция Лагранжа для рассматриваемой задачи имеет вид

$$F(u, x, p) = \Phi(x(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x(k), u(k), k) + \\ + \sum_{k=0}^{N-1} (p(k+1), f(x(k), u(k), k) - x(k+1)). \quad (4.4)$$

Она определена в $\Omega(u) \times \Omega(x) \times \Omega(p)$, где $\Omega(u) \times \Omega(x)$ задается неравенствами (4.1), $\Omega(p)$ — прямое произведение $N+1$ пространства E^n .

Двойственные задачи $2P$ и $2D$ полностью аналогичны задачам $1P$ и $1D$:

Задача $2P$:

$$\max_{u, x} \varphi(u, x) = \max_{u, x} \min_p F(u, x, p) = \omega_P. \quad (4.5)$$

Задача $2D$:

$$\min_p \psi(p) = \min_p \max_{u, x} F(u, x, p) = \omega_D, \quad (4.6)$$

где функция $F(u, x, p)$ определена из (4.4).

Так же, как и в § 1, можно показать, что задача $2P$ эквивалентна исходной, а оптимальное значение функционала ω_D двойственной задачи всегда не меньше оптимального значения функционала ω_P прямой задачи: $J^* = \omega_P \leq \omega_D$.

Теорема 4.1. Пусть выполнены следующие условия:

1. Множества $R_k (k=0, \dots, N)$, выделяемые неравенствами (4.1), замкнуты, ограничены и выпуклы.

2. Уравнения движения линейны и имеют вид (2.2).

3. Существует хотя бы один процесс $\{\bar{u}, \bar{x}\}$, удовлетворяющий (4.4), для которого

$$g_j(k, \bar{u}(k), \bar{x}(k)) > 0 \quad (j=1, \dots, m(k); k=0, \dots, N-1).$$

4. $\Phi(x)$ и $f_0(x, u, k)$ ($k=0, 1, \dots, N-1$) — выпуклые вверх функции.

При этих условиях справедливо равенство $\omega_P = \omega_D = J^*$, а функция Лагранжа (4.4) имеет седловую точку на решении $\{u^*, x^*, p^*\}$ двойственных задач $2P$ и $2D$.

Доказательство этих утверждений аналогично доказательству теорем 2.2, 3.1. Очевидно, они останутся верными и для частного случая ограничений (1.1а), (1.2а).

Отметим, что замечания, сделанные в конце § 3, справедливы и для задачи 2.

§ 5. Достаточные условия оптимальности

Полученные в §§ 3, 4 соотношения позволяют сформулировать простые достаточные условия оптимальности. Рассмотрим для определенности задачу 1 (см. (1.1) — (1.4)).

Введем функции

$$\begin{aligned} G_k(p(k+1), p(k), x(k), u(k)) = \\ = H_k(p(k+1), x(k), u(k)) - (p(k), x(k)) \quad (5.1) \\ (k=0, \dots, N-1), \end{aligned}$$

где H_k — функция Гамильтона:

$$H(p(k+1), x(k), u(k)) = (p(k+1), f(x(k), u(k), k)).$$

При $k=N$

$$G_N(p(N), x(N)) = \Phi(x(N)) - (p(N), x(N)). \quad (5.2)$$

С помощью функций $G_k (k=0, \dots, N)$ преобразуем функцию Лагранжа (1.5) к виду:

$$\begin{aligned} F(u, x, p) &= \Phi(x(N)) - (p(N), x(N)) + \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} [(p(k+1), f(x(k), u(k), k)) - (p(k), x(k))] = \\ &= G_N(p(N), x(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} G_k(p(k+1), p(k), x(k), u(k)). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Такое представление функции Лагранжа будем называть двойственным, в отличие от прямого (1.5).

Теорема 5.1. Пусть существуют такие $p^*(k)$ ($k=0, \dots, N$), не все равные нулю, и такие $u^*(k)$ ($k=0, \dots, N-1$), $x^*(k)$ ($k=0, \dots, N$), удовлетворяю-

щие ограничения (1.1), (1.2) и уравнения движения (1.4), что

$$\begin{aligned} \max_{x(k) \in X_k} \max_{u(k) \in U_k} G_k(p^*(k+1), p^*(k), x(k), u(k)) = \\ = G_k(p^*(k+1), p^*(k), x^*(k), u^*(k)) \quad (5.4) \\ (k = 0, 1, \dots, N-1), \end{aligned}$$

$$\max_{x(N) \in X_N} G(p^*(N), x(N)) = G(p^*(N), x^*(N)). \quad (5.5)$$

Тогда процесс $\{u^*, x^*\}$ оптимальный.

Теорема 5.5 следует из левой части неравенства (3.2) и утверждения теоремы 3.1. Ее же можно доказать непосредственно, просуммировав неравенства, следующие из (5.4) и (5.5) по $k=0, \dots, N$, и используя уравнения движения (1.4).

§ 6. Двойственная задача управления

В этом параграфе будет продолжено изучение двойственной задачи 1D. Прежде всего, используя представление функции Лагранжа в виде (5.3), задачу 1D можно переформулировать в следующем виде.

Задача 1Da. Найти последовательность p , удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} \max_{u(k) \in U_k} H_k(p(k+1), x(k), u(k)) = \\ = H_k(p(k+1), x(k), u^*(k, p(k+1), x(k))) = \\ = H_k^*(p(k+1), x(k)), \quad (6.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{x(k) \in X_k} [H_k^*(p(k+1), x(k)) - (p(k), x(k))] = \\ = G_k^*(p(k+1), p(k)) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1), \quad (6.2) \end{aligned}$$

$$\max_{x(N) \in X_N} [\Phi(x(N)) - (p(N), x(N))] = G_N^*(p(N)) \quad (6.3)$$

и минимизирующую функционал

$$\Psi(p) = G_N^*(p(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} G_k^*(p(k+1), p(k)). \quad (6.4)$$

Задача 1Dа и исходная задача 1 образуют пару двойственных задач, точно так же, как и задачи 1P и 1D. При этом если выполнены условия теоремы 2.2, то существует такая оптимальная последовательность p^* , что

$$J^* = J(u^*, x^*) = \psi(p^*) = \omega_D.$$

Рассмотрим теперь случай отсутствия ограничений на переменные состояния $x(k)$. Будем предполагать, кроме того, что функции $f(x, u)$ и $\Phi(x)$ дифференцируемы по своим переменным.

Перепишем равенства (6.1), (6.2) следующим образом:

$$\begin{aligned} \max_{u(k) \in U_k} \max_{x(k)} [H_k(p(k+1), x(k), u(k)) - (p(k), x(k))] = \\ = \hat{G}_k^*(p(k+1), p(k)) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1), \quad (6.5) \\ \max_{x(N)} [\Phi(x(N)) - (p(N), x(N))] = G_N^*(p(N)). \end{aligned}$$

Пусть теперь $\{p^*, x^*, u^*\}$ — оптимальное решение задачи 1Dа. Фиксируя в (6.5) $u(k) = u^*(k)$, $p(k) = p^*(k)$, получим, что для выполнения равенства (6.5) необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} \max_{u(k) \in U_k} H_k(p^*(k+1), x^*(k), u(k)) = \\ = H_k(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)), \quad (6.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^*(k) = \left[\frac{\partial f(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial x(k)} \right]^T p^*(k+1) \quad (6.7) \\ (k = 0, \dots, N-1). \end{aligned}$$

Кроме того, из (6.5) при $k=N$ следует, что

$$p^*(N) = \frac{\partial \Phi(x^*(N))}{\partial x(N)}. \quad (6.8)$$

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 6.1. Для того чтобы процесс $\{u^*, x^*, p^*\}$ был оптимальным, необходимо, чтобы выполнялись условия (6.6) — (6.8).

Заметим, что здесь не использовалось соотношение $\psi(p^*) = \min_p \psi(p)$, где $\psi(p)$ определено из (6.4).

Если предположить, что функция $\psi(p)$ дифференцируема, то из условия $\frac{\partial \psi(p^*)}{\partial p(k)} = 0 (k=0, \dots, N)$ получим, что на оптимальном процессе двойственной задачи должны выполняться уравнения движения

$$x^*(k+1) = f(x^*(k), u^*(k), k) \quad (k=0, \dots, N-1). \quad (6.9)$$

Пусть теперь исходная задача 1 такова, что выполнено соотношение двойственности

$$\omega_P = \omega_D, \quad (6.10)$$

т. е. функция Лагранжа на оптимальном решении $\{u^*, x^*, p^*\}$ пары двойственных задач имеет седловую точку. В этом случае из § 2 следует, что

$$\max_{u, x} F(u, x, p^*) = F(u^*, x^*, p^*), \quad (6.11)$$

$$\min_p F(u^*, x^*, p) = F(u^*, x^*, p^*). \quad (6.12)$$

Предполагая по-прежнему дифференцируемость функций $\Phi(x)$, $f(x, u)$, из (6.11), (6.12) легко получить, что условия (6.6) — (6.9) необходимы, чтобы процесс $\{u^*, x^*, p^*\}$ был седловой точкой функции Лагранжа $F(u, x, p)$. Эти же условия представляют собой не что иное, как принцип максимума для дискретных систем (см. § 4.2). В то же время, если $\{u^*, x^*, p^*\}$ — седловая точка функции Лагранжа, то, как следует из § 3, $\{u^*, x^*\}$ — решение прямой задачи, а p^* — решение двойственной.

Таким образом, принцип максимума (6.6) — (6.9) дает необходимые условия оптимальности для задач 1P, 1D и 1PD в случае, если эти задачи связаны соотношением двойственности (6.10), либо в случае, если функция $\psi(p)$ дифференцируема, а для исходной задачи справедлив принцип максимума (теорема (4.2.1)).

Если теперь потребовать выполненными условия 1—4 теоремы 2.2, то в этом случае из теоремы 2.2 получим, что оптимальные решения прямой и двойственной

задачи совпадают, а из теоремы 4.6.1 — что для прямой задачи принцип максимума дает и достаточные условия оптимальности.

Таким образом, окончательно получим

Теорема 6.2. Пусть выполнены условия одноэкстремальности и регулярности § 2, и пусть ограничения на переменные состояния $X(k)$ отсутствуют.

Тогда для того, чтобы процесс $\{u^, x^*, p^*\}$ был седловой точкой функции Лагранжа (1.5), необходимо и достаточно, чтобы для этого процесса был справедлив принцип максимума, т. е. чтобы выполнялись соотношения (6.6) — (6.9).*

§ 7. Учет ограничений

В §§ 1—4 были установлены соотношения между двойственными задачами P и D . Было показано, что оптимальное значение функционала прямой задачи всегда не превосходит оптимального значения двойственной задачи; в случае же одноэкстремальности исходной задачи оптимальные значения функционалов пары двойственных задач совпадают.

В этой связи остановимся кратко на одной общей интерпретации функции Лагранжа и переходе к двойственной задаче.

Рассмотрим для определенности задачу 2 § 4. В этой задаче из-за того, что переменные u и x связаны рекуррентным соотношением (4.4), удовлетворить ограничениям (4.1) и (4.2) трудно (т. е. нахождение допустимого процесса, удовлетворяющего ограничениям (4.1), (4.2), (4.4), является самостоятельной задачей).

Введение функции Лагранжа позволило перейти к двойственной задаче $2D$, в которой уже не предполагаются выполненными уравнения движения (4.4). «Степень» выполнения этих соотношений на каждом шаге оценивается множителями Лагранжа $p(k+1)$; при этом, в случае одноэкстремальности исходной задачи, оптимальное решение двойственной задачи таково, что на нем уравнения движения выполняются уже точно. Таким образом, выражение
$$\sum_{k=0}^{N-1} (p(k+1), f(x(k), u(k), k) - x(k+1))$$
 представляет собой некоторый «штраф» за нарушение

уравнений движения, который минимизируется при решении двойственной задачи.

Если же требуется дополнительно оценить и степень влияния ограничений на переменные состояния типа (4.1), (4.2), то для этого необходимо ввести соответствующие множители Лагранжа $\lambda(k)$. В этом случае соотношения двойственности получают более симметричную форму. Именно, рассмотрим задачу 2 с ограничениями

$$g_j(x(k), u(k), k) \geq 0$$

$$(j = 1, \dots, m(k); k = 0, 1, \dots, N-1), \quad (7.1)$$

$$u_i(k) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, r; k = 0, 1, \dots, N-1). \quad (7.1a)$$

Тогда функция Лагранжа будет иметь вид

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x, u, p, \lambda) = & \Phi(x(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x(k), u(k), k) + \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} (p(k+1), f(x(k), u(k), k) - x(k+1)) + \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k), g(x(k), u(k), k)). \quad (7.2) \end{aligned}$$

Здесь $\lambda(k)$ — множители Лагранжа для ограничений (7.1), предполагается, что $\lambda_j(k) \geq 0$ ($j = 1, \dots, m(k); k = 0, 1, \dots, N-1$).

Двойственные задачи в этом случае будут иметь вид.

Задача 2P. Найти последовательности $\{x^*, u^* \geq 0\}$, для которых

$$\max_{x, u \geq 0} \min_{p, \lambda \geq 0} \tilde{F}(x, u, p, \lambda) = \max_{x, u \geq 0} \tilde{\varphi}(x, u) = \tilde{\omega}_P. \quad (7.3)$$

Задача 2D. Найти последовательности $\{p^*, \lambda^* \geq 0\}$, для которых

$$\max_{p, \lambda \geq 0} \max_{x, u \geq 0} \tilde{F}(x, u, p, \lambda) = \min_{p, \lambda \geq 0} \tilde{\psi}(p, \lambda) = \tilde{\omega}_D. \quad (7.4)$$

Между задачами 2 и задачами $2\tilde{P}$ существуют следующие соотношения.

Лемма 7.1. Пусть $\{x^*, u^*\}$ — решение задачи 2 с ограничениями (7.1); тогда $\{x^*, u^*\}$ — решение задачи (7.3) и $J^* = \tilde{\omega}_P$.

Пусть, обратно, $\{x^*, u^*\}$ — решение задачи (7.3), причем $\tilde{\varphi}(x, u) > -\infty$. Тогда $\{x^*, u^*\}$ — решение задачи 2 и $\tilde{\omega}_P = J^*$.

Доказательство леммы 7.1 аналогично доказательству теоремы 1.1.

Кроме того, нетрудно видеть, что задачи (7.3), (4.5) также эквивалентны и $\tilde{\omega}_P = \omega_P$.

Рассмотрим теперь задачу $2D$.

Фиксируем в (7.4) оптимальные значения $\{p^*, \lambda^*\}$. Тогда задача $\max_{x, u \geq 0} \tilde{F}(x, u, p^*, \lambda^*) = \omega_D$, как видно из (7.2), распадается на подзадачи

$$\begin{aligned} \max_{x(k)} [f_0(x(k), u(k), k) + (p^*(k+1), f(x(k), u(k), k)) - \\ - (p^*(k), x(k)) + (\lambda^*(k), g(x(k), u(k), k))] \quad (7.5) \\ (k = 0, 1, \dots, N-1), \end{aligned}$$

$$\max_{x(N)} [\Phi(x(N)) - (p(N), x(N))], \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \max_{(k) \geq 0} [f_0(x(k), u(k), k) + (p^*(k+1), f(x(k), u(k), k)) + \\ + (\lambda^*(k), g(x(k), u(k), k))] \quad (k = 0, 1, \dots, N-1). \quad (7.7) \end{aligned}$$

Необходимыми, а в случае выполнения условий 1—4 теоремы 4.1 и достаточными условиями оптимальности для подзадач (7.5) — (7.7) будут

$$\begin{aligned} p^*(k) = \frac{\partial f_0(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial x(k)} + \left[\frac{\partial f(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial x(k)} \right]^T \times \\ \times p^*(k+1) + \left[\frac{\partial g(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial x(k)} \right]^T \lambda^*(k), \quad (7.8) \end{aligned}$$

$$p^*(N) = \frac{\partial \Phi(x^*(N))}{\partial x(N)}, \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} v^*(k) + \frac{\partial f_0(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial u(k)} + \left[\frac{\partial f(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial u(k)} \right]^T \times \\ \times p^*(k+1) + \left[\frac{\partial g(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial u(k)} \right]^T \lambda^*(k) = 0, \quad (7.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^*(k) \geq 0, \quad u^*(k) \geq 0, \quad (u^*(k), v^*(k)) = 0 \quad (7.11) \\ (k = 0, 1, \dots, N-1). \end{aligned}$$

Таким образом, можно сформулировать следующую задачу дискретного управления.

Задача 2Da. Найти последовательность $\lambda(k)$ ($k=N-1, \dots, 1, 0$) (управление λ) и соответствующую этому управлению в силу уравнений движения (7.8) с граничным условием (7.9) траекторию p , удовлетворяющую ограничениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0(x(k), u(k), k)}{\partial u(k)} + \left[\frac{\partial f(x(k), u(k), k)}{\partial u(k)} \right]^T p(k+1) + \\ + \left[\frac{\partial g(x(k), u(k), k)}{\partial u(k)} \right]^T \lambda(k) \leq 0, \lambda(k) \geq 0 \quad (7.12) \\ (k = N-1, \dots, 1, 0) \end{aligned}$$

и доставляющие показателю качества $J_D = \tilde{F}(x, u, p, \lambda)$, где функция $\tilde{F}(x, u, p, \lambda)$ определена из (7.2), минимальное значение.

Задачи 2 и 2Da образуют пару двойственных задач управления, так же как и задачи (7.3), (7.4) или задачи (4.5), (4.6).

Задача 2Da представляет собой некоторую задачу дискретного управления с показателем качества (7.2), уравнениями движения (7.8), граничным условием (7.9) и ограничениями на переменные (7.12), причем переменными управления и состояния в двойственной задаче будут, соответственно, векторы $\lambda(k)$ и $p(k)$.

В задаче 2Da присутствуют также «прямые» переменные $x(k)$, $u(k)$, как и в двойственной задаче нелинейного программирования § 2.9. Полностью симметричную форму пара двойственных задач будет иметь только в линейном случае, т. е. когда исходная прямая задача будет представлять из себя задачу линейного динамического программирования (см. подробнее § 11 этой главы).

Рассмотрим теперь соотношения между двойственными задачами 2Da, (7.4) и (4.6).

Лемма 7.2. Пусть $\{p^*, \lambda^*\}$ — решение задачи 2Da и выполнены условия 1—4 теоремы 4.1. Тогда $\{p^*, \lambda^*\}$ — решение задач (7.4), (4.6), причем $J_D^* = \tilde{\omega}_D = \omega_D$.

Пусть, обратно, $\{p^*, \lambda^*\}$ — решение задачи (7.4) и $\tilde{\Psi}(p, \lambda) < \infty$. Тогда $\{p^*, \lambda^*\}$ — решение задачи 2Da и (4.6), причем, $\tilde{\omega}_D = \omega_D = J_D^*$.

Доказательство леммы 7.2 аналогично доказательству леммы 7.1.

Наконец, соотношения между парой двойственных задач (7.3), (7.4) или 2Da устанавливает следующая теорема.

Теорема 7.1. Пусть выполнены условия 1—4 теоремы 4.1, и пусть $\{x^*, u^*, p^*, \lambda^*\}$ — решение пары двойственных задач 2, 2Da.

Тогда

$$J^* = J_D^*,$$

где J^* — оптимальное значение функционала прямой задачи, J_D^* — оптимальное значение функционала (7.2) двойственной задачи.

Кроме того, из лемм 7.1, 7.2 и теоремы 7.1 следуют равенства

$$J^* = \omega_P = \tilde{\omega}_P = \tilde{\omega}_D = \omega_D = J_D^*,$$

если предположить, что условия 1—4 теоремы 4.1 выполнены, и неравенство

$$\tilde{\omega}_P \leq \tilde{\omega}_D$$

в общем случае.

Доказательство теоремы 7.1 аналогично доказательству теоремы 2.2; при ее доказательстве можно также воспользоваться результатами теории двойственности для статических задач (§ 2.8).

§ 8. Условия оптимальности для задачи с ограничениями на переменные состояния

Используя функцию Лагранжа (7.1), можно распространить теорему Куна — Таккера (§ 2.10) на дискретные задачи управления и тем самым получить «двойственные» условия оптимальности (в отличие от «прямых» условий § 3.6).

Итак, рассмотрим задачу 1, сформулированную в § 1 этой главы. Для нее в § 3.6 было показано, что при определенных условиях регулярности (см. § 3.6) для опти-

мального управления на последнем шаге $k=N-1$ справедливы неравенства

$$\delta_u H(p^*(N), x^*(N-1), u^*(N-1), N-1) \leq 0 \quad (8.1)$$

для всех $\delta u^*(N-1) \in \bar{K}_{N-1}(u^*(N-1))$ и удовлетворяющих неравенствам

$$\left(\frac{\partial h_j(N, x^*(N))}{\partial x(N)}, \delta x^*(N) \right) \geq 0, \quad j \in J_N(x^*(N)). \quad (8.2)$$

Здесь $\bar{K}_{N-1}(u^*(N-1))$ — конус допустимых вариаций по множеству U_{N-1} в точке $u^*(N-1)$, который вследствие условий регулярности можно записать в виде (см. § 2.3)

$$\begin{aligned} \bar{K}_{N-1}(u^*(N-1)) = \\ = \left\{ \delta u^*(N-1) \left| \left(\frac{\partial g_j(N-1, u^*(N-1))}{\partial u(N-1)}, \delta u^*(N-1) \right) \geq 0, \right. \right. \\ \left. \left. j \in J_{N-1}(u^*(N-1)) \right\}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Векторы $\delta x^*(N)$ в (8.2) определяются из равенства

$$\delta x^*(N) = \frac{\partial f(x^*(N-1), u^*(N-1), N-1)}{\partial u(N-1)} \delta u^*(N-1). \quad (8.4)$$

Обозначим множество векторов $\delta x^*(N)$ из (8.4), для которых соответствующие $\delta u^*(N-1) \in \bar{K}_{N-1}(u^*(N-1))$, через $M_N(x^*(N))$. (В § 3.6 эти множества обозначались через $M_{N,N}^u(x^*(N))$.)

Так как по предположению $\bar{K}_{N-1}(u^*(N-1))$ — выпуклый конус, то, очевидно, $M_N(x^*(N))$ — выпуклый конус.

Так как, кроме того, $\delta_u H_N = (p^*(N), \delta x^*(N))$, где векторы $\delta x^*(N)$ определены из (8.4), то система неравенств (8.1) — (8.3) эквивалентна следующей задаче:

$$\max(p^*(N), \delta x^*(N)) \quad (8.5)$$

при

$$\delta x^*(N) \in M_N(x^*(N)), \quad (8.6)$$

$$\left(\frac{\partial h_j(N, x^*(N))}{\partial x(N)}, \delta x^*(N) \right) \geq 0, \quad j \in J_N(x^*(N)), \quad (8.7)$$

причем оптимальное значение функционала задачи (8.5) — (8.7) равно 0, так как, очевидно, вектор $\delta x^*(N) = 0$ удовлетворяет условиям (8.6), (8.7) задачи.

Введем для ограничений (8.7) множители Лагранжа $\lambda_j(N) \geq 0$, $j \in J_N(x^*(N))$, и сформулируем для задачи (8.5), (8.7) двойственную

$$\min_{\lambda_j(N)} \max_{\delta x^*(N)} \left[(p^*(N), \delta x^*(N)) + \sum_j \lambda_j(N) \left(\frac{\partial h_j(x^*(N))}{\partial x(N)}, \delta x^*(N) \right) \right], \quad (8.8)$$

где $j \in J_N(x^*(N))$, $\delta x^*(N) \in M_N(x^*(N))$.

Пусть $\lambda_j^*(N)$ — оптимальное решение задачи (8.8). Тогда из (8.8) следует, что

$$(p_1^*(N), \delta x^*(N)) \leq 0 \quad (8.9)$$

для всех $\delta x^*(N) \in M_N(x^*(N))$, где вектор $p_1^*(N)$ равен

$$p_1^*(N) = p^*(N) + \sum_j \lambda_j^*(N) \frac{\partial h_j(N, x^*(N))}{\partial x(N)}. \quad (8.10)$$

Переходя от (8.9) к формулировке условий в пространстве вариаций δU_{N-1} , получим, что при оптимальном управлении на последнем шаге выполнены неравенства

$$\delta_u H(p_1^*(N), x^*(N-1), u^*(N-1), N-1) \leq 0 \quad (8.11)$$

для всех $\delta u^*(N-1) \in \bar{K}_{N-1}(u^*(N-1))$, где конус $\bar{K}_{N-1}(u^*(N-1))$ задается неравенствами (8.2), а вектор $p_1^*(N)$ определен из (8.10).

Повторяя эти рассуждения для следующего шага $k = N-2$, получим, что из неравенств

$$\delta_u H(p^*(N-1), x^*(N-2), u^*(N-2), N-2) \leq 0 \quad (8.12)$$

при

$$\left(\frac{\partial g_j(N-2, u^*(N-2))}{\partial u(N-2)}, \delta u^*(N-2) \right) \leq 0, \quad (8.13)$$

$$j \in J_{N-2}(u^*(N-2)),$$

$$\left(\frac{\partial h_j(N-1, x^*(N-1))}{\partial x(N-1)}, \delta x^*(N-1) \right) \geq 0, \\ j \in J_{N-1}(x^*(N-1)), \quad (8.14)$$

$$\left(\frac{\partial h_j(N, x^*(N))}{\partial x(N)}, \delta x^*(N) \right) \geq 0, j \in J_N(x^*(N)), \quad (8.15)$$

следуют неравенства

$$\delta_u H(p_1^*(N-1), x^*(N-2), u^*(N-2), N-2) \leq 0$$

для всех $\delta u^*(N-2) \in \bar{K}_{N-2}(u^*(N-2))$, где конус $\bar{K}_{N-2}(u^*(N-2))$ задается неравенствами (8.13), а

$$p_1^*(N-1) = \left[\frac{\partial f(x^*(N-2), u^*(N-2), N-2)}{\partial u(N-2)} \right]^T p_1^*(N) + \\ + \sum_j \lambda_j^*(N-1) \frac{\partial h_j(N-1, x^*(N-1))}{\partial x(N-1)};$$

$\lambda_j^*(N-1)$, $j \in J_{N-1}(x^*(N-1))$, — оптимальные множители Лагранжа для ограничений (8.14).

Таким образом, методом математической индукции получим, что переход к двойственной задаче позволяет в условиях оптимальности теорем 3.6.2, 3.6.3 с помощью множителей Лагранжа $\lambda_j^*(k) \geq 0$, $j \in J_k(x^*(k))$, исключить неравенства (3.6.17), определяя теперь сопряженные переменные из новой сопряженной системы вида

$$p_1(k) = \left[\frac{\partial f(x(k), u(k), k)}{\partial x(k)} \right]^T p_1(k+1) + \\ + \sum_{j=1}^{s(k)} \lambda_j(k) \frac{\partial h_j(k, x(k))}{\partial x(k)} \quad (k = N-1, \dots, 0) \quad (8.16)$$

с граничным условием

$$p_1(N) = \frac{\partial \Phi(x(N))}{\partial x(N)} + \sum_{j=1}^{s(N)} \lambda_j(N) \frac{\partial h_j(N, x(N))}{\partial x(N)}. \quad (8.17)$$

Здесь $\lambda_j(k) \geq 0$, $h_j(k, x(k)) \geq 0$,

$$\lambda_j(k) h_j(k, x(k)) = 0 \quad (j=1, \dots, s(k)). \quad (8.18)$$

(Очевидно, если выполнены условия (8.18), то $\lambda_j(k) \geq 0$ для $j \in J_k(x(k))$ и $\lambda_j(k) = 0$ для остальных j).

Отметим, что эти же соотношения можно получить и без требований существования ненулевых специальных вариаций. Для этого достаточно перейти от задачи динамического линейного программирования, которая следует из условий оптимальности теоремы 3.6.1, к двойственной ей. Это доказательство приведено в § 11. Собирая вместе, для удобства ссылок, полученные соотношения и условия, при которых они выполнены, приходим к следующим необходимым условиям оптимальности.

Теорема 8.1. Пусть u^* — оптимальное управление в задаче 1 § 1 с ограничениями (1.2), (1.1а). Будем считать, что:

1) функции $\Phi(x)$, $f(x, u, k)$, $h(k, x)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по своим переменным при каждом $k=0, 1, \dots, N$;

2) для каждого $u(k) \in U_k$ ($k=0, 1, \dots, N-1$) конусы допустимых вариаций $K_k(u(k))$ (см. § 2.3) выпуклы и имеют внутренние точки;

3) для каждого $x(k) \in X_k$ ($k=0, 1, \dots, N$) градиенты активных ограничений

$$\frac{\partial h_j(k, x(k))}{\partial x(k)}, \quad j \in J_k(x(k)),$$

линейно независимы.

Тогда на оптимальном управлении справедливы неравенства

$$\delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k), k) \leq 0 \quad (8.19)$$

для всех $\delta u^*(k) \in \bar{K}_k(u^*(k))$ ($k=0, 1, \dots, N-1$), где оптимальные значения переменных $\{p^*(k)\}$ находятся из сопряженной системы

$$\begin{aligned} p^*(k) = & \left[\frac{\partial f(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial x(k)} \right]^T p^*(k+1) + \\ & + \left[\frac{\partial h(k, x^*(k))}{\partial x(k)} \right]^T \lambda^*(k) \quad (8.20) \\ & (k=N-1, \dots, 1, 0), \end{aligned}$$

с граничным условием

$$p^*(N) = \frac{\Phi(x^*(N))}{\partial x(N)} + \left[\frac{\partial h(N, x^*(N))}{\partial x(N)} \right]^T \lambda^*(N), \quad (8.21)$$

причем оптимальные значения $\{\lambda^*(k)\}$ удовлетворяют условиям дополняющей нежесткости

$$\lambda^*(k) \geq 0, \quad h(k, x^*(k)) \geq 0, \quad (\lambda^*(k), h(k, x^*(k))) = 0 \\ (k=0, 1, \dots, N). \quad (8.22)$$

Здесь $\frac{\partial h}{\partial x(k)} = \left[\frac{\partial h_j}{\partial x_j(k)} \right] (i=1, \dots, n; j=1, \dots, s(k))$ —

матрицы первых производных размера $s(k) \times n$; у сопряженных переменных $p(k)$ нижний индекс «1», который использовался в (8.16), (8.17) для того, чтобы отличить эту последнюю сопряженную систему от (3.1.1), (3.1.2), опущен.

Очевидно, если нет ограничений на переменные состояния, тогда все $\lambda_j(k) = 0$ ($j=1, \dots, s(k)$; $k=0, 1, \dots, N$) и теорема 8.1 переходит в «обычную» формулировку необходимых условий оптимальности (теорема 3.2.1), а сопряженная система (8.20), (8.21) переходит в сопряженную систему (3.1.1), (3.2.1).

Следствие 8.1. Пусть теперь в задаче 1 ограничения на переменные управления задаются в виде (1.2а), причем, помимо условий 1.3 теоремы 8.1, справедливы условия:

- 1) функции $g_j(k, u(k))$ непрерывно дифференцируемы при всех $j=1, \dots, t(k)$; $k=0, 1, \dots, N-1$;
- 2) градиенты активных ограничений

$$\frac{\partial g_j(k, u(k))}{\partial u(k)}, \quad j \in J_h(u(k)),$$

линейно независимы.

Тогда в теореме 8.1 неравенство (8.19) должно выполняться при всех $\delta u^*(k)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\left(\frac{\partial g_j(k, u^*(k))}{\partial u(k)}, \delta u^*(k) \right) \leq 0, \quad j \in J_h(u^*(k)). \quad (8.23)$$

Это утверждение, частным случаем которого является теорема 3.2.2, непосредственно следует из теоремы 8.1, так как при сделанных предположениях конус $\bar{K}_h(u^*(k))$ может задаваться системой неравенств (8.23).

§ 9. Принцип максимума для задач с ограничениями на переменные состояния

Заметим, что неравенство (8.19) в пространстве δX_k имеет вид

$$(p^*(k+1), \delta x^*(k+1)) \leq 0 \quad (9.1)$$

для всех $\delta x^*(k+1) \in M_{k+1}(x^*(k+1))$, где конус $M_{k+1}(x^*(k+1))$ определен из соотношений

$$\delta x^*(k+1) = \frac{\partial f(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial u(k)} \delta u^*(k) \in M_{k+1}(x^*(k+1)),$$

если

$$\delta u^*(k) \in \bar{K}_k(u^*(k))$$

(см. также §§ 3.3, 3.6).

Допустим, что множества $R_1(x) = f(x, U, k)$ выпуклы при любых x и $k=0, 1, \dots, N-1$. Тогда из (8.20) следует (см. доказательство теоремы 4.2.1), что в оптимальной точке $x^*(k+1)$ справедливо равенство

$$\max_{x(k+1) \in R_1(x^*(k))} (p^*(k+1), x(k+1)) = (p^*(k+1), x^*(k+1)),$$

т. е. приходим к принципу максимума для дискретных систем с ограничениями на переменные управления.

Именно, справедлива

Теорема 9.1. Пусть u^* — оптимальное управление в задаче 1 § 1, и пусть множества $f(x, U, k)$ выпуклы при любых x и $k=0, 1, \dots, N-1$.

Тогда на оптимальном управлении справедливы равенства

$$\begin{aligned} \max_{u(k) \in U_k} H(p^*(k+1), x^*(k), u(k), k) = \\ = H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k), k) \quad (k=0, \dots, N-1), \end{aligned}$$

где оптимальные значения $p^*(k)$ удовлетворяют условиям (8.20), (8.21), а оптимальные значения $\lambda^*(k)$ удовлетворяют условиям дополняющей нежесткости (8.22).

§ 10. Теорема Куна — Таккера для задач управления

При выводе теоремы 8.1 множители Лагранжа $\lambda(k)$ вводились только для ограничений на переменные состояния (1.1а), ограничения (1.2) (или (1.2а)) оставались без изменения как в формулировке «прямых» (теорема 3.6.1), так и «двойственных» (теорема 8.1) условий оптимальности.

Введем теперь множители Лагранжа $\mu_j(k)$, $j \in J_k(u^*(k))$, для ограничений (1.2а) и перейдем на $(N-1)$ -м шаге от условий оптимальности (8.1) — (8.3) к следующим:

$$\left[\frac{\partial f(x^*(N-1), u^*(N-1), N-1)}{\partial u(N-1)} \right]^T p^*(N) + \\ + \sum_j \mu_j^*(N-1) \frac{\partial g_j(N-1, u^*(N-1))}{\partial u(N-1)} = 0, \quad (10.1)$$

где $p^*(N)$ удовлетворяет условиям (8.21).

Заметим, что переход от (8.1) — (8.3) к (10.1) с помощью пары двойственных задач типа (8.5) — (8.7) и (8.8) здесь не совсем корректен, так как двойственная задача (типа (8.8)) имеет неограниченное решение (функция Лагранжа линейна, а на переменные $\delta x^*(N)$ теперь уже не накладывается каких-либо условий); поэтому нужно использовать пару двойственных задач линейного программирования типа (2.10.5), (2.10.6) — (2.10.7), (2.10.8).

Осуществляя подобный переход на каждом шаге k ($k = N-1, \dots, 0$), получим необходимые условия оптимальности в следующей форме (см. также § 11).

Теорема 10.1. Пусть выполнены условия теоремы 6.1 § 3.6.

Тогда следующие условия необходимы для того, чтобы управление u^* было оптимальным в задаче 1 § 1:

$$x^*(k+1) = f(x^*(k), u^*(k), k), \quad x(0) = a, \quad (10.2)$$

$$p^*(k) = \left[\frac{\partial f(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial x(k)} \right]^T p^*(k+1) + \frac{\partial h(k, x^*(k))}{\partial x(k)} \lambda^*(k), \quad (10.3)$$

$$p^*(N) = \frac{\partial \Phi(x^*(N))}{\partial x(N)} + \frac{\partial h(N, x^*(N))}{\partial x(N)} \lambda^*(N), \quad (10.4)$$

$$\left[\frac{\partial f(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial u(k)} \right]^T p^*(k+1) + \frac{\partial g(k, u^*(k))}{\partial u(k)} \mu^*(k) = 0, \quad (10.5)$$

$$\begin{aligned} (\lambda^*(k), h(k, x^*(k))) &= 0, \quad \lambda^*(k) \geq 0, \quad h(k, x^*(k)) \geq 0, \\ (\mu^*(k), g(k, u^*(k))) &= 0, \quad \mu^*(k) \geq 0, \quad g(k, u^*(k)) \geq 0 \\ (k &= 0, \dots, N-1). \end{aligned} \quad (10.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \lambda(k) &= \{\lambda_1(k), \dots, \lambda_{s(k)}(k)\}, \quad \mu(k) = \{\mu_1(k), \dots, \mu_{m(k)}(k)\}, \\ \frac{\partial h(k)}{\partial x} &= \left[\frac{\partial h_j(k)}{\partial x_i} \right], \quad \frac{\partial g(k)}{\partial u} = \left[\frac{\partial g_t(k)}{\partial u_q} \right]_{qt}, \\ h(k) &= h(k, x(k)), \quad g(k) = g(k, u(k)) \\ (i &= 1, \dots, n; q = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s(k); t = 1, \dots, m(k)). \end{aligned}$$

В теореме 10.1 соотношения (10.2) — (10.4) определяют динамику процесса, а соотношения (10.5), (10.6) являются необходимыми условиями Куна — Таккера (см. § 2.10) максимума функции $H(p(k+1), x(k), u(k), k)$ при ограничениях (1.1а), (1.2а).

Таким образом, теорема 10.1 представляет собой распространение теоремы Куна — Таккера (в ее дифференциальной форме) на задачи дискретного управления.

Ее можно было бы также получить, применяя непосредственно теорему 2.10.1 к задаче дискретного управления 1 (если бы только теорема 2.10.1 была получена для случая смешанных ограничений типа равенств и неравенств; заметим, что такое обобщение справедливо).

Можно также показать, что условия теоремы 10.1 необходимы для того, чтобы процесс $\{u, x, p, \lambda \geq 0, \mu \geq 0\}$ был седловой точкой функции Лагранжа вида

$$\begin{aligned} F(u, x, p, \lambda, \mu) &= \\ &= \Phi(x(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} (p(k+1), x(k+1) - f(x(k), u(k), k)) + \\ &+ \sum_{k=0}^N (\lambda(k), h(k, x(k))) + \sum_{k=0}^{N-1} (\mu(k), g(k, u(k))). \end{aligned} \quad (10.2)$$

Пусть теперь задача 1 удовлетворяет условиям одноэкстремальности и регулярности 1—4 § 2. Тогда нетрудно показать, что условия теоремы 9.1 или 10.1 будут и достаточными условиями оптимальности управления u .

В заключение рассмотрим задачу с суммарным показателем качества и совместными ограничениями (4.1) на переменные состояния и управления (задача 2 § 4). Пользуясь рассуждениями, аналогичными доказательству теоремы 10.1, можно показать, что справедливы следующие необходимые условия оптимальности для этой задачи.

Теорема 10.2. Пусть u^* — оптимальное управление в задаче 2 § 4, x^* — соответствующая траектория, u пусть векторы

$$\frac{\partial g_j(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial x(k)}, \quad j \in J_h(x^*(k), u^*(k)),$$

$$\frac{\partial g_j(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial u(k)}, \quad j \in J_h(x^*(k), u^*(k)),$$

где $J_h(x^*(k), u^*(k)) = \{j | g_j(x^*(k), u^*(k), k) = 0, j = 1, \dots, m(k)\}$, линейно независимы. Тогда существуют такие векторы $p^*(k)$ и $\lambda^*(k)$, что

$$x^*(k+1) = f(x^*(k), u^*(k), k), \quad x(0) = a,$$

$$p^*(k) =$$

$$= \frac{\partial f_0(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial x(k)} + \left[\frac{\partial f(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial x(k)} \right]^T p^*(k+1) +$$

$$+ \left[\frac{\partial g(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial x(k)} \right]^T \lambda^*(k),$$

$$p^*(N) = \frac{\partial \Phi(x^*(N))}{\partial x(N)},$$

$$\frac{\partial f_0(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial u(k)} + \left[\frac{\partial f(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial u(k)} \right]^T p^*(k+1) +$$

$$+ \left[\frac{\partial g(x^*(k), u^*(k), k)}{\partial u(k)} \right]^T \lambda^*(k) = 0,$$

$$\lambda^*(k) \geq 0, \quad g(x^*(k), u^*(k), k) \geq 0,$$

$$(\lambda^*(k), g(x^*(k), u^*(k), k)) = 0 \quad (k=0, 1, \dots, N-1).$$

§ 11. Задачи линейного динамического программирования

Выше были получены соотношения двойственности и условия оптимальности для задач управления, в которых пока не использовалась линейность уравнений движения (а лишь выпуклость соответствующих множеств достижимости). Это, по существу, теория двойственности для нелинейных систем. Использование же линейности уравнений движения позволяет дать теории двойственности в управлении более заверченный и симметричный вид.

Особенно симметричную форму приобретают соотношения двойственности для задач линейного динамического программирования (см. § 1.5). Рассмотрим следующую задачу.

Задача P. Найти управление u и траекторию x , удовлетворяющие уравнениям движения

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) - s(k), \quad (11.1)$$

$$x(0) = a \quad (k=0, 1, \dots, N-1) \quad (11.2)$$

и ограничениям

$$C(k)x(k) + D(k)u(k) \leq h(k), \quad (11.3)$$

$$u(k) \geq 0 \quad (k=0, 1, \dots, N-1), \quad (11.4)$$

для которых показатель качества

$$J_P = (a(N), x(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} [(a(k), x(k)) + (b(k), u(k))] \quad (11.5)$$

принимает максимальное значение.

Для этой задачи составим функцию Лагранжа

$$F(x, u, p, \lambda) =$$

$$\begin{aligned} &= (a(N), x(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} [(a(k), x(k)) + (b(k), u(k))] + \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} (p(k+1), A(k)x(k) + B(k)u(k) - s(k) - x(k+1)) + \\ &+ (p(0), a - x(0)) + \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k), h(k) - \\ &\quad - C(k)x(k) - D(k)u(k)). \end{aligned} \quad (11.6)$$

Тогда прямая задача запишется в виде

$$J_P^* = \max_{x, u \geq 0, p, \lambda \geq 0} \min F(x, u, p, \lambda), \quad (11.7)$$

а двойственная

$$J_D^* = \min_{p, \lambda \geq 0} \max_{x, u \geq 0} F(x, u, p, \lambda). \quad (11.8)$$

В силу линейности исходной задачи двойственную задачу (11.8) можно также сформулировать в виде некоторой задачи оптимального управления, исключив полностью «прямые» переменные x и u (в отличие от нелинейного случая). Для этого перепишем функцию Лагранжа в «двойственном» виде (ср. § 5):

$$\begin{aligned} F(p, \lambda, x, u) = & (a(N) - p(N), x(N)) + \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} (p(k+1)A(k) - \lambda(k)C(k) + a(k) - p(k), x(k)) + \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} (p(k+1)B(k) - \lambda(k)D(k) + b(k), u(k)) - \\ & - \sum_{k=0}^{N-1} [(p(k+1), s(k)) - (\lambda(k), h(k))] + (p(0), a). \end{aligned} \quad (11.9)$$

Из (11.8) и (11.9) видно, что максимизация F по $u(k) \geq 0$ приводит к условиям

$$(p(k+1)B(k) - \lambda(k)D(k) + b(k), u(k)) = 0,$$

если

$$v(k) = -B^T(k)p(k+1) + D^T(k)\lambda(k) - b(k) \geq 0$$

и $(v(k), u(k)) = \infty$ в противном случае.

Максимизация F по $x(k)$ ($k=0, 1, \dots, N-1$) приводит к условиям

$$(p(k+1)A(k) - \lambda(k)C(k) + a(k) - p(k), x(k)) = 0,$$

если

$$q(k) = A^T(k)p(k+1) - C^T(k)\lambda(k) + a(k) - p(k) = 0$$

и $(q(k), x(k)) = \infty$ в противном случае.

Максимизация F по $x(N)$ дает $(a(N) - p(N), x(N)) = 0$, если $q(N) = p(N) - a(N) = 0$ и $(q(N), x(N)) = \infty$ в противном случае.

Так как в задаче D требуется найти такие p и $\lambda \geq 0$, которые минимизируют $\max_{x, u \geq 0} F$, то из этих соотношений видно, что переменные p и $\lambda \geq 0$ должны быть таковы, что $v(k) \geq 0$, $q(k) = 0$.

Таким образом, двойственную задачу можно сформулировать также в виде задачи оптимального управления, полностью симметричной прямой задаче P .

Задача D . Найти управление λ и траекторию p , удовлетворяющие двойственным уравнениям движения

$$p(k) = A^T(k)p(k+1) - C^T(k)\lambda(k) + a(k), \quad (11.10)$$

$$p(N) = a(N) \quad (k = N-1, \dots, 1, 0) \quad (11.11)$$

и ограничениям

$$-B^T(k)p(k+1) + D^T(k)\lambda(k) \geq b(k) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1), \quad (11.12)$$

$$\lambda(k) \geq 0 \quad (k = 0, 1, \dots, N-1), \quad (11.13)$$

для которых показатель качества

$$J_D = (p(0), a) - \sum_{k=0}^{N-1} [(p(k+1), s(k)) - (\lambda(k), h(k))] \quad (11.14)$$

принимает минимальное значение.

В этой задаче управляющими воздействиями являются множители Лагранжа $\lambda(k)$, переменные $p(k)$ определяют состояние двойственной системы (11.10) на шаге k .

Так как исходная задача P может быть сформулирована в виде некоторой (статической) задачи линейного программирования, то, используя результаты теории двойственности для этой задачи, получим следующую теорему двойственности для задач линейного динамического программирования.

Теорема 11.1. Если для одной из пары двойственных задач P и D существует оптимальное управление, то и другая разрешима. При этом для любых оптимальных управлений u^* , λ^* задач P и D имеет место равенство $J_P^* = J_D^*$, где J_P^* , J_D^* вычисляются, соответственно, из (11.1), (11.2), (11.5) при $u = u^*$ и из (11.10), (11.11), (11.14) при $\lambda = \lambda^*$.

Отметим, что теорему 11.1 можно также получить непосредственно из теоремы 4.1.

В теореме 11.1, таким образом, утверждается, что функция Лагранжа (11.6) (или (11.9)) имеет седловую точку на решении $\{u^*, x^*, p^*, \lambda^*\}$ пары двойственных задач P и D . Используя обобщение теоремы Куна — Таккера на динамические задачи (§ 10), получим следующие необходимые и достаточные условия оптимальности решения пары двойственных задач P и D .

Для пары двойственных задач (11.1) — (11.5), (11.10) — (11.14) можно, используя теорему 10.2, получить совместные условия оптимальности.

Теорема 11.2. Для того чтобы процесс $\{x^, u^* \geq 0\}$, $\{p^*, \lambda^* \geq 0\}$ был оптимальным решением пары двойственных задач (11.1) — (11.5), (11.10) — (11.14) (или, что то же самое, образовывал седловую точку функции Лагранжа (11.6) или (11.9)), необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

$$x^*(k+1) = A(k)x^*(k) + B(k)u^*(k) - s(k), \quad (11.1)$$

$$x(0) = a, \quad (11.2)$$

$$p^*(k) = A^T(k)p^*(k+1) - C^T(k)\lambda^*(k) + a(k), \quad (11.10)$$

$$p^*(N) = a(N), \quad (11.11)$$

$$(\lambda^*(k), \mu^*(k)) = 0, \quad \lambda^*(k) \geq 0, \quad \mu^*(k) \geq 0, \quad (11.15)$$

$$\mu^*(k) = h(k) - C(k)x^*(k) - D(k)u^*(k), \quad (11.16)$$

$$(u^*(k), v^*(k)) = 0, \quad u^*(k) \geq 0, \quad v^*(k) \geq 0, \quad (11.17)$$

$$v^*(k) = -B^T(k)p^*(k+1) + D^T(k)\lambda^*(k) - b(k) \quad (11.18)$$

$$(k=0, 1, \dots, N-1).$$

Из этих совместных условий нетрудно получить условия оптимальности отдельно для задач P и D . Именно, справедливы следующие теоремы.

Теорема 11.3 (Принцип максимума для прямой задачи P). Для того чтобы управление $u^ \geq 0$ и соответствующая ему в силу прямых уравнений движения (11.1), (11.2) траектория x^* были оптимальными в задаче P , необходимо и достаточно существование таких $\lambda^* \geq 0$ и p^* , удовлетворяющих сопряженной системе (11.10), (11.11), для которых справедливо равенство*

$$\max_{u(k)} H_P(p^*(k+1), u(k)) = H_P(p^*(k+1), u^*(k)), \quad (11.19)$$

где максимум берется по всем $u(k)$, удовлетворяющим ограничениям (11.3), (11.4), а $\lambda^*(k)$ являются оптимальными двойственными переменными в задаче линейного программирования (11.19), (11.3), (11.4).

Здесь функция Гамильтона

$$H_P(p(k+1), u(k)) = (b(k), u(k)) + (p(k+1), B(k) u(k)). \quad (11.20)$$

Заметим, что эту теорему можно также получить, применяя теорему 9.1 для задачи P .

Теорема 11.4 (Принцип минимума для двойственной задачи D). Для того чтобы управление $\lambda^* \geq 0$ и соответствующая ему траектория p^* двойственной системы (11.10), (11.11) были оптимальными, необходимо и достаточно существование таких $u^* \geq 0$ и x^* , удовлетворяющих прямой системе (11.1), (11.2), для которых справедливо равенство

$$\min_{\lambda(k)} H_D(x^*(k), \lambda(k)) = H_D(x^*(k), \lambda^*(k)), \quad (11.21)$$

где максимум берется по всем $\lambda(k)$, удовлетворяющим ограничениям (11.12), (11.13), а $u^*(k)$ являются оптимальными двойственными переменными в задаче линейного программирования (11.21), (11.12), (11.13).

Здесь функция Гамильтона имеет вид

$$H_D(x(k), \lambda(k)) = -(\lambda(k), C(k) x(k)) + (\lambda(k), h(k)). \quad (11.22)$$

Заметим, что теорему 11.3 можно также получить, если применить теорему 11.2 к двойственной задаче P .

Получим еще одно важное соотношение между двойственными задачами P и D . Для этого рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned} (p(k+1), x(k+1)) &= \\ &= (p(k+1), A(k)x(k) + B(k)u(k) - s(k)) = \\ &= (p(k+1)A(k), x(k)) + (p(k+1), B(k)u(k)) - \\ &- (p(k+1), s(k)) = (p(k) + \lambda(k)C(k) - a(k), x(k)) + \\ &+ (p(k+1), B(k)u(k)) - (p(k+1), s(k)) = \\ &= (p(k), x(k)) + (\lambda(k), C(k)x(k)) + (a(k), x(k)) + \\ &+ (p(k+1), B(k)u(k)) - (p(k+1), s(k)). \end{aligned} \quad (11.23)$$

Здесь последовательно были использованы прямые и двойственные уравнения движения (11.1), (11.10).

Просуммируем левую и правую части равенств (11.23) по $k=0, 1, \dots, N-1$. В результате получим

$$\begin{aligned} (a(N), x(N)) - (p(0), a) = \\ = - \sum_{k=0}^{N-1} (a(k), x(k)) + \sum_{k=0}^{N-1} (p(k+1), B(k)u(k)) + \\ + \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k), C(k)x(k)) - \sum_{k=0}^{N-1} (p(k+1), s(k)). \quad (11.24) \end{aligned}$$

Здесь были использованы равенства (11.2), (11.11). Прибавим к обеим частям равенства (11.24) слагаемое $\sum_{k=0}^{N-1} [(b(k), u(k)) + (\lambda(k), h(k))]$. Используя определения (11.20), (11.22), (11.9) и (11.14), из (11.20) получим

$$J_P - J_D = \sum_{k=0}^{N-1} [H_P(p(k+1), u(k)) - H_D(\lambda(k), x(k))]. \quad (11.25)$$

Из равенства (11.25) вытекает ряд следствий, определяющих соотношение между показателями качества и функциями Гамильтона прямой и двойственной задач. Одно из них, вследствие его важности, сформулируем в виде теоремы.

Теорема 11.5 (Локальная теорема двойственности). *Если $\{x, u^* \geq 0\}$ — оптимальное решение прямой задачи, а $\{p, \lambda^* \geq 0\}$ — оптимальное решение двойственной, то*

$$\begin{aligned} H_P(p^*(k+1), u^*(k)) = H_D(\lambda^*(k), x^*(k)) \\ (k=0, 1, \dots, N-1). \end{aligned} \quad (11.26)$$

Обратно, если для каких-то $\{x^*, u^* \geq 0\}$, $\{p^*, \lambda^* \geq 0\}$, удовлетворяющих, соответственно, уравнениям движения (11.1), (11.13), (11.10), (11.11) и ограничениям (11.3), (11.4), (11.12), (11.13) прямой и двойственных задач, верно равенство (11.26), то $\{x^*, u^*\}$, $\{p^*, \lambda^*\}$ являются решением пары двойственных задач P и D .

Доказательство. Последовательно из (11.20), (11.3), (11.13), (11.12), (11.4), (11.22) имеем

$$\begin{aligned} H_P &= (b(k), u(k)) + (p(k+1), B(k)u(k)) \leq \\ &\leq (b(k), u(k)) + (p(k+1), B(k)u(k)) + (\lambda(k), h(k) - \\ &\quad - C(k)x(k) - D(k)u(k)) = -(\lambda(k), C(k)x(k)) + \\ &\quad + (\lambda(k), h(k)) + (p(k+1)B(k) - \lambda(k)D(k) + b(k), u(k)) \leq \\ &\leq -(\lambda(k), C(k)x(k)) + (\lambda(k), h(k)) = H_D. \end{aligned}$$

Следовательно, всегда

$$H_P(p(k+1), u(k)) \leq H_D(\lambda(k), x(k)). \quad (11.27)$$

Так как на оптимальном процессе $J_P^* = J_D^*$ в силу теоремы 11.1, то из (11.21) и (11.27) получаем (11.22).

Таким образом, решение пары двойственных задач P и D динамического линейного программирования сводится к решению пары двойственных задач статического линейного программирования

$$\begin{cases} \max [(p^*(k+1), B(k)u(k)) + (b(k), u(k))], \\ C(k)x^*(k) + D(k)u(k) \leq h(k), \\ u(k) \geq 0; \end{cases} \quad (11.28)$$

$$\begin{cases} \min [-(\lambda(k), C(k)x^*(k)) + (\lambda(k), h(k))], \\ -B^T(k)p^*(k+1) + D^T(k)\lambda(k) \geq b(k), \\ \lambda(k) \geq 0, \end{cases} \quad (11.29)$$

связанных между собой прямыми и двойственными уравнениями движения (11.1), (11.2), (11.10), (11.11) и соотношениями двойственности (11.22).

Полученные соотношения двойственности позволяют строить эффективные алгоритмы решения задач линейного динамического программирования. В этих алгоритмах можно осуществлять приближения к оптимуму как на основе решения только прямой или только двойственной задачи, так и с помощью одновременного использования условий оптимальности теорем 11.2, 11.3 или 11.1.

Большой интерес здесь также представляют конечные алгоритмы, обеспечивающие сходимость к оптимальному решению — как и в статическом случае — за конечное число шагов. При этом равенство (11.22) может слу-

жить удобным критерием для оценки близости приближения к оптимуму. Однако рассмотрение этих алгоритмов выходит за рамки книги.

Кратко остановимся на игровой интерпретации полученных соотношений двойственности. Рассмотрим антагонистическую игру двух лиц, в которой стратегией первого игрока являются последовательности x и $u \geq 0$, а второго — последовательности p , $\lambda \geq 0$. Платой игры является функция Лагранжа (11.6).

Игрок I, выбирая x и $u \geq 0$, старается получить как можно большее значение функции Лагранжа. Однако если при этом он не будет следовать уравнениям движения (11.1), (11.2) или нарушать ограничения на «ресурсы» (11.3), то игрок II может «наказать» его, назначив за нарушение этих условий как угодно большие «штрафы». Таким образом, наилучший способ действия игрока I состоит в максимизации (11.5) при выполнении ограничений (11.1) — (11.4).

С другой стороны, если игрок II, выбирая «штрафы» p и $\lambda \geq 0$, не будет следовать «динамике цен» (11.10), (11.11) и ограничениям (11.12), то игрок I может как угодно много выиграть у игрока II.

В заключение этого параграфа установим связь между условиями оптимальности для нелинейной задачи управления с фазовыми ограничениями, сформулированные в теоремах 3.6.1 и 8.1.

Условия оптимальности теоремы 3.6.1 могут быть, очевидно (ср. § 8), сформулированы в виде следующей задачи линейного динамического программирования:

$$\max_{k=0}^{N-1} (p^*(k+1), B^*(k) \delta u^*(k)) = 0, \quad (11.15)$$

$$\delta x^*(k+1) = A^*(k) \delta x^*(k) + B^*(k) \delta u^*(k), \quad (11.16)$$

$$\left(\frac{\partial g_j(k, u^*(k))}{\partial u(k)}, \delta u^*(k) \right) \geq 0, \quad j \in J_k(u^*(k)) \quad (11.17)$$

$$(k = 0, 1, \dots, N-1),$$

$$\left(\frac{\partial h_j(k, x^*(k))}{\partial x(k)}, \delta x^*(k) \right) \geq 0, \quad j \in J_k(x^*(k)) \quad (11.18)$$

$$(k = 1, \dots, N),$$

где матрицы $A^*(k)$, $B^*(k)$ определены из (3.6.12), (3.6.13).

Вводя множители Лагранжа $\lambda_j(k) \geq 0$, $j \in J_k(x^*(k))$, для ограничений (11.18) и переходя к двойственной задаче, получим условия оптимальности теоремы 8.1 (точнее, следствия 8.1). Вводя, кроме того, множители Лагранжа $\mu_j(k) \geq 0$, $j \in J_k(u^*(k))$, для ограничений (11.17) и переходя опять к двойственной задаче, получим условия оптимальности теоремы 10.1.

§ 12. Задачи квадратичного динамического программирования

В заключение этой главы приведем соотношения двойственности для задач квадратичного динамического программирования. Рассмотрим задачу (см. § 1.5).

Задача P. Найти управление u и траекторию x , удовлетворяющие уравнениям движения

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) - s(k) \quad (12.1)$$

$$(k=0, 1, \dots, N-1),$$

$$x(0) = a \quad (12.2)$$

и ограничениям

$$C(k)x(k) + D(k)u(k) \leq h(k), \quad (12.3)$$

$$u(k) \geq 0 \quad (k=0, 1, \dots, N-1), \quad (12.4)$$

для которых показатель качества

$$J_P = \frac{1}{2} (x(N), Q(N)x(N)) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2} (x(k), Q(k)x(k)) + (a(k), x(k)) \right] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2} (u(k), R(k)u(k)) + (b(k), u(k)) \right] \quad (12.5)$$

принимает максимальное значение.

Матрицы $Q(k)$ и $R(k)$ считаются симметричными и неположительно определенными.

Представим функцию Лагранжа для этой задачи в двойственной форме:

$$\begin{aligned}
 F(u, x, p, \lambda) = & \left(\frac{1}{2} x(N) Q(N) - p(N), x(N) \right) + \\
 & + \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2} x(k) Q(k) + a(k) + p(k+1) A(k) - \right. \\
 & \left. - \lambda(k) C(k) - p(k), x(k) \right) + \\
 & + \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2} u(k) R(k) + b(k) + p(k+1) B(k) - \lambda(k) D(k), u(k) \right) - \\
 & - \sum_{k=0}^{N-1} (p(k+1), s(k)) + \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k), h(k)) + (p(0), a). \quad (12.6)
 \end{aligned}$$

Используя функцию Лагранжа (12.6), после несложных преобразований получим следующую задачу D квадратичного динамического программирования, двойственную исходной задаче P .

Задача D . Найти управление $\lambda \geq 0$ и траекторию p , удовлетворяющие уравнениям движения

$$p(k) = A^T(k) p(k+1) - C^T(k) \lambda(k) + Q(k) x(k) + a(k), \quad (12.7)$$

$$p(N) = Q(N) x(N) \quad (k = N-1, \dots, 1, 0) \quad (12.8)$$

и ограничениям

$$-B^T(k) p(k+1) + D^T(k) \lambda(k) - R(k) u(k) \geq b(k), \quad (12.9)$$

$$\lambda(k) \geq 0, \quad (12.10)$$

которые доставляют показателю качества

$$\begin{aligned}
 J_D = & \frac{1}{2} (x(N), Q(N) x(N)) + \\
 & + \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2} (x(k), Q(k) x(k)) - (p(k+1), s(k)) \right] + \\
 & + \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2} (u(k), R(k) u(k)) + (\lambda(k), h(k)) \right] + (p(0), a) \quad (12.11)
 \end{aligned}$$

минимальное значение.

В этой задаче переменные x, u считаются заданными.

Так как при сделанных предположениях показатель качества (12.5) прямой задачи будет выпуклой вверх функцией переменных x и u , то для рассматриваемой пары задач P и D справедлива теорема двойственности 2.2.

Поэтому из решения прямой задачи P может быть получено решение двойственной задачи D и, наоборот, из решения двойственной задачи может быть получено решение прямой; причем оптимальные значения функционалов (12.5), (12.11) этих задач совпадают:

$$J_P^* = J_D^*. \quad (12.12)$$

Из равенства (12.12) и определений (12.5), (12.11) следует, что на оптимальном процессе $\{x^*, u^*, p^*, \lambda^*\}$ справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{N-1} [(a(k), x^*(k)) + (b(k), u^*(k))] = (p^*(0), a) - \\ - \sum_{k=0}^{N-1} [(p^*(k+1), s(k)) + (\lambda^*(k), h(k))].$$

Из теоремы 10.2 получим

Теорема 12.1. Пусть матрицы $Q(k)$ ($k=0, 1, \dots, N$), $R(k)$ ($k=0, 1, \dots, N-1$) симметричны и неположительно определены.

Тогда для того чтобы $\{u^*, x^*, \lambda^*, p^*\}$ были решением пары двойственных задач (12.1)–(12.4), (12.7)–(12.10), необходимо и достаточно выполнение следующих условий.

$$x^*(k+1) = A(k)x^*(k) + B(k)u^*(k) - s(k),$$

$$x(0) = a,$$

$$p^*(k) = A^T(k)p^*(k+1) - C^T(k)\lambda^*(k) + a(k) + Q(k)x^*(k),$$

$$p^*(N) = Q(N)x^*(N),$$

$$(\lambda^*(k), \mu^*(k)) = 0, \lambda^*(k) \geq 0, \mu^*(k) \geq 0,$$

$$\mu^*(k) = h(k) - C(k)x^*(k) - D(k)u^*(k),$$

$$(u^*(k), v^*(k)) = 0, u^*(k) \geq 0, v^*(k) \geq 0,$$

$$v^*(k) = -B^T(k)p^*(k+1) + D^T(k)\lambda^*(k) - b(k) - \\ - R(k)u^*(k)$$

$$(k=0, 1, \dots, N-1).$$

Введем функцию Гамильтона

$$H_P(p(k+1), u(k)) = \\ = \frac{1}{2} (u(k), R(k)u(k)) + (b(k), u(k)) + (p(k+1), B(k)u(k))$$

для прямой задачи и

$$H_D(\lambda(k), x(k)) = -(\lambda(k), h(k)) + (\lambda(k), C(k)x(k))$$

для двойственной.

Тогда условия оптимальности для прямой задачи запишутся в следующем виде.

Теорема 12.2. *Для того чтобы процесс $\{x^*, u^* \geq 0\}$ был оптимальным в прямой задаче P , необходимо существование таких $\{p^*, \lambda^* \geq 0\}$, удовлетворяющих сопряженной системе (12.7), (12.8), для которых верно равенство*

$$\max_{u(k)} H_P(p^*(k+1), u(k)) = H_P(p^*(k+1), u^*(k)) \quad (12.13)$$

$$(k=0, 1, \dots, N-1),$$

где максимум берется по всем $u(k)$, удовлетворяющим ограничениям (12.3), (12.4), а $\lambda^*(k)$ являются оптимальными двойственными переменными в задаче квадратичного программирования (12.13), (12.3), (12.4).

Условия оптимальности для двойственной задачи имеют следующий вид.

Теорема 12.3. *Для того чтобы процесс $\{p^*, \lambda^* \geq 0\}$ был оптимальным в двойственной задаче D , необходимо и достаточно существование таких $\{x^*, u^* \geq 0\}$, удовлетворяющих прямой системе (12.1), (12.2), для которых верно равенство*

$$\min_{\lambda(k)} H_D(\lambda(k), x^*(k)) = H_D(\lambda^*(k), x^*(k)) \quad (12.14)$$

$$(k=0, 1, \dots, N-1),$$

где минимум берется по всем $\lambda(k)$, удовлетворяющим ограничениям (12.9), (12.10), а $u^*(k)$ являются оптимальными двойственными переменными в задаче линейного программирования (12.14), (12.9), (12.10).

В соответствии с полученными условиями оптимальности для нахождения оптимального управления имеются три основные возможности:

1) выбрать некоторое допустимое управление u и последовательно его улучшать в направлении подходящих допустимых вариаций до тех пор, пока таких вариаций уже не найдется;

2) заменить исходную задачу двойственной (если, конечно, такая замена возможна); часто решение двойственной задачи оказывается проще;

3) воспользоваться условиями оптимальности §§ 5.8—5.10 и искать такие u , x , p и λ , которые удовлетворяют этим условиям; в случае одноэкстремальности задачи такое решение эквивалентно нахождению седловой точки функции Лагранжа.

В первом способе происходит приближение к оптимальному процессу по управлению u и соответствующей траектории x (точнее, к процессу, «подозрительному» на оптимальность, так как условия оптимальности в общем случае только необходимы), во втором — по сопряженным (двойственным) переменным λ , p , в третьем осуществляется приближение как по u , x , так и по λ , p .

Поэтому методы нахождения оптимального управления можно разделить на три основные группы: прямые, двойственные и методы одновременного решения прямой и двойственной задач. (Отметим, что в линейном программировании эти методы получили название, соответственно, последовательного улучшения плана, уточнения оценок и сокращения невязок.)

В этой главе рассмотрим кратко каждую группу методов в отдельности. Но прежде получим оценку для приближения.

§ 1. Оценка приближения

Рассмотрим задачу оптимизации конечного состояния, удовлетворяющую условиям 1—4 § 5.2. Для нее оптимальное значение функционала исходной задачи равно оптимальному значению двойственной, т. е.

$$\Phi(x^*(N)) = \min_p \max_{x, u} \left[\Phi(x(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} (p(k+1), x(k+1) - f(x(k), u(k), k)) \right]. \quad (1.1)$$

Пусть $\bar{u}$ — произвольное управление, $\bar{x}$ — соответствующая ему траектория, и пусть $\bar{p}$ — некоторая произвольная последовательность сопряженных переменных, не обязательно удовлетворяющих сопряженной системе (3.1.1). Тогда из (1.1) получим

$$\Phi(\bar{x}(N)) \leq \Phi(x^*(N)) \leq \max_{x, u} \left[\Phi(x(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} (\bar{p}(k+1), x(k+1) - f(x(k), u(k), k)) \right]. \quad (1.2)$$

Оценку сверху в (1.2) можно упростить. Допустим сначала, что нет ограничений на переменные состояния. Представим правую часть неравенств (1.2) в виде (ср. §§ 5.5, 5.6)

$$\begin{aligned} \Psi(\bar{p}) = & \max_{x(N)} [\Phi(x(N)) - (\bar{p}(N), x(N))] + \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} \max_{u(k) \in U_k} \max_{x(k)} [(\bar{p}(k+1), f(x(k), u(k), k)) - (\bar{p}(k), x(k))]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Считаем, что начальное состояние здесь фиксировано: $x(0) = a$. Так как рассматриваемая задача, по предположению, одноэкстремальна, то если некоторый процесс $\{u, x, p\}$ удовлетворяет сопряженной системе, это не только необходимо, но и достаточно, чтобы в (1.3) достигался максимум по x (см. § 5.6). Пусть теперь $\bar{p}$ — последовательность сопряженных переменных, удовлет-

воряющая сопряженной системе (3.1.1) с граничным условием (3.1.2) для процесса $\{\bar{u}, \bar{x}\}$. Тогда (1.3) можно переписать в виде

$$\Psi(\bar{p}) = \Phi(\bar{x}(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} [(\bar{p}(k+1), \bar{x}(k+1)) - \max_{u(k) \in U_k} (\bar{p}(k+1), f(x(k), u(k), k)))] \quad (1.4)$$

Здесь $\bar{x}(k+1) = f(\bar{x}(k), \bar{u}(k), k)$. Вводя функцию Гамильтона из (3.1.3), получим окончательно

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{x}(N)) &\leq \Phi(x^*(N)) \leq \Phi(\bar{x}(N)) + \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} \max_{u(k) \in U_k} [H(\bar{p}(k+1), \bar{x}(k), u(k), k) - \\ &- H(\bar{p}(k+1), \bar{x}(k), \bar{u}(k), k))]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Неравенство (1.5) дает оценку сверху и снизу для оптимального значения функционала в случае отсутствия ограничений на переменные состояния. Для того чтобы получить эти оценки, нужно проделать следующие операции:

- 1) выбрать произвольное допустимое управление $\bar{u}$;
- 2) из уравнения движения (1.2.3) при начальном состоянии $x(0) = a$ вычислить траекторию x ;
- 3) из сопряженных уравнений (3.1.1) при условии (3.1.2) вычислить последовательность $\bar{p}$;
- 4) из (1.5) получить оценки для $\Phi(x^*(N))$.

Заметим, что неравенство (1.5) можно также получить, если воспользоваться оценкой (2.2.11) для статической задачи.

Из (1.5) получим

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{x}(N)) &\leq \\ &\leq \Phi(\bar{x}(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} \max_{u(k) \in U_k} [H(\bar{p}(k+1), \bar{x}(k), u(k), k) - \\ &- H(\bar{p}(k+1), \bar{x}(k), \bar{u}(k), k))]. \end{aligned}$$

но, что чем меньше сумма

$$\begin{aligned} & \max_{u(k) \in U_k} [H(\bar{p}(k+1), \bar{x}(k), u(k), k) - \\ & \quad - H(\bar{p}(k+1), \bar{x}(k), \bar{u}(k), k)], \quad (1.6) \end{aligned}$$

ближе управление $\bar{u}$ к оптимальному; если же сумма (1.6) равна нулю, то $\bar{u}$ — оптимальное управление. Таким образом, величина (1.6) может быть использована для улучшения выбранного допустимого управления, т. е. для нахождения оптимального (см. § 13 этой главы).

Неравенства (1.5) справедливы и для задачи 2 (если выполнены условия § 5.4). В этом случае они имеют вид

$$\begin{aligned} J^* \leq \bar{J} + \sum_{k=0}^{N-1} \max_{u(k) \in U_k} [H(\bar{p}(k+1), \bar{x}(k), u(k), k) - \\ - H(\bar{p}(k+1), \bar{x}(k), \bar{u}(k), k)]. \quad (1.7) \end{aligned}$$

Здесь $\bar{u}$ — некоторое допустимое управление, $\bar{x}$ — соответствующая траектория, $\bar{J}$ — показатель качества при этом управлении; сопряженные переменные $\bar{p}$ находятся из системы (3.1.9) при условии (3.1.10), функция Гамильтона H определена из (3.1.11).

Очевидно, возможно обобщение (1.7) и на другие типы задач.

В частности, при ограничениях на переменные состояния (вида (5.1.2а)), повторяя почти дословно предыдущие рассуждения, получим (если, конечно, выполнены условия одноэкстремальности и регулярности задачи), что справедливы следующие неравенства (для задачи 1, например):

$$\begin{aligned} J^* \leq \bar{J} + \sum_{k=0}^{N-1} \left[\max_{u(k) \in U_k} H(\bar{p}(k+1), \bar{x}(k), u(k), k) - \right. \\ \left. - H(\bar{p}(k+1), \bar{x}(k), \bar{u}(k), k) \right] + \sum_{k=0}^{N-1} (\bar{\lambda}(k), h(k, \bar{x}(k))), \end{aligned}$$

где $\bar{p}$ находятся из сопряженной системы (5.8.20) при условии (5.8.21), а $\bar{\lambda}(k)$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) — некоторые произвольные неотрицательные векторы. Будем выбирать

их всегда такими, чтобы $\bar{\lambda}_j(k) > 0$ при $h_j(k, \bar{x}(k)) = 0$ и $\bar{\lambda}_j(k) = 0$ в остальных случаях. Тогда

$$(\bar{\lambda}(k), h(k, \bar{x}(k))) = 0, \quad (1.8)$$

и опять приходим к старым неравенствам.

Таким образом, если на переменные состояния наложены ограничения (5.1.2а), то оценки для оптимального значения функционала находятся из (1.7), где $\bar{p}$ находятся из (5.8.20), (5.8.21) при $u = \bar{u}$, $x = \bar{x}$, $\lambda = \bar{\lambda}$; причем $\bar{\lambda}$ должны удовлетворять условиям дополняющей нежесткости (1.8).

§ 2. Методы возможных направлений

Как следует из § 2.13, реализация прямых методов или методов возможных направлений состоит из следующих этапов:

- 1) выбор произвольного допустимого управления;
- 2) выбор подходящего направления, в котором следует изменить это управление;
- 3) определение длины шага;
- 4) определение нового управления и оценка близости его к оптимальному.

Прежде чем рассмотреть каждый из этих этапов в отдельности, необходимо иметь формулу для оценки изменения показателя качества в зависимости от изменения управления. Эта формула, по существу, получена при выводе необходимых условий оптимальности управления (§ 3.2). Действительно, рассмотрим задачу 1 § 3.2.

Пусть управление u изменилось на малую величину:

$$u(k) + \delta u(k) \quad (k=0, 1, \dots, N-1).$$

Тогда соответствующие изменения в траектории определит уравнение в вариациях

$$\delta x(k+1) = \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial x(k)} \delta x(k) + \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial u(k)} \delta u(k) \quad (2.1)$$

$$(k=0, 1, \dots, N-1),$$

а изменение показателя качества опишется выражением

$$\delta \Phi(x(N)) = \left(\frac{\partial \Phi(x(N))}{\partial x(N)}, \delta x(N) \right)$$

(пренебрегая величинами второго порядка малости).

Положим

$$p(N) = \frac{\partial \Phi(x(N))}{\partial x(N)} \quad (2.2)$$

и определим сопряженную систему

$$p(k) = \left[\frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial x(k)} \right]^T p(k+1) \quad (k = N-1, \dots, 1) \quad (2.3)$$

с граничным условием (2.2).

Умножая обе части (2.1) скалярно на $p(k+1)$ и учитывая (2.3), получим, что

$$\begin{aligned} (p(k+1), \delta x(k+1)) - (p(k), \delta x(k)) = \\ = \left(p(k+1), \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial u(k)} \delta u(k) \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Суммируя (2.4) по $k=0, \dots, N-1$, получим

$$\begin{aligned} (p(N), \delta x(N)) - (p(0), \delta x(0)) = \\ = \sum_{k=0}^{N-1} \left(p(k+1), \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial u(k)} \delta u(k) \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Считая, что начальное состояние $x(0)$ фиксировано и учитывая (2.2), получим окончательно из (2.5)

$$\delta \Phi(x(N)) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(p(k+1), \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial u(k)} \delta u(k) \right). \quad (2.6)$$

Или, учитывая определение функции Гамильтона,

$$\delta J = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\partial H(p(k+1), x(k), u(k))}{\partial u(k)}, \delta u(k) \right). \quad (2.7)$$

Формула (2.6) (или (2.7)) показывает в первом приближении изменение показателя качества δJ в зависимости от изменения управления δu . Легко показать, что аналогичная формула имеет место и для задач с суммарным показателем качества (1.3.2), нужно только использовать соответствующие определения сопряженной системы и функции Гамильтона (см. § 3.1).

Рассмотрим пространство управлений $\Omega(u)$ (размерности Nr), элементами которого являются управления

$u = \{u(0), \dots, u(N-1)\}$. В этом пространстве формулу (2.7) можно переписать в виде

$$\delta J = (q, \delta u), \quad (2.8)$$

где вектор $\delta u = \{\delta u(0), \dots, \delta u(N-1)\}$, вектор $q = \{q(0), \dots, q(N-1)\}$,

$$q(k) = \frac{\partial H(u(k))}{\partial u(k)} = \left[\frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial u(k)} \right]^T p(k+1). \quad (2.9)$$

Из (2.8) видно, что вектор q с координатами, определяемыми из (2.9), является градиентом показателя качества по управлению u :

$$\frac{\partial J(x(0), u)}{\partial u} = q.$$

Таким образом, вектор q определяет в пространстве управлений $\Omega(u)$ направление наибольшего возрастания показателя качества, и задача состоит в том, чтобы двигаться в направлении как можно ближе к направлению градиента $\partial J / \partial u$, не выходя, однако, за пределы ограничений.

По-прежнему будем называть вариацию $\delta u = \{\delta u(0), \dots, \delta u(N-1)\}$ управления $u = \{u(0), \dots, u(N-1)\}$ допустимой, если $\delta u(k) \in K(u(k))$ ($k=0, \dots, N-1$), т. е. если $u(k) + \varepsilon \delta u(k) \in U$ для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_k$ (см. § 3.3).

Допустимую вариацию δu управления u назовем *подходящей* (ср. § 2.3), если

$$\delta \Phi(x(N)) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\partial H(u(k))}{\partial u(k)}, \delta u(k) \right) > 0. \quad (2.10)$$

Итак, если известно произвольное допустимое управление, то для него всегда по формуле (2.7) можно определить, как изменится показатель качества δJ при малых вариациях управления.

При этом, аналогично теореме 2.4.1, нетрудно показать, что для оптимального управления u^* не существует подходящих допустимых вариаций, т. е.

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\partial H(u^*(k))}{\partial u(k)}, \delta u^*(k) \right) \leq 0 \quad (2.11)$$

для всех $\delta u^*(k) \in \bar{K}(u^*(k))$ ($k=0, 1, \dots, N-1$).

Отсюда легко получить и необходимые условия оптимальности, сформулированные в § 3.2; для этого достаточно в качестве допустимой выбрать специальную вариацию вида

$$\delta u(j) = 0 \quad (j \neq k), \quad \delta u^*(k) \in \bar{K}(u^*(k)).$$

С другой стороны, если для некоторого допустимого управления u^*

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\partial H(u^*(k))}{\partial u(k)}, \delta u^*(k) \right) \leq 0$$

для всех $\delta u^*(k) \in \bar{K}(u^*(k))$ ($k = 0, \dots, N-1$), то при некоторых условиях выпуклости множества U в окрестности точек $u^*(k)$ управление u^* доставляет показателю качества $J(x(0), u)$ при заданном начальном состоянии $x(0)$, во всяком случае, локальный максимум. Следует заметить, что из-за монотонности изменения показателя качества (см. замечание в конце § 2.14) методами возможных направлений практически всегда находится (локальный) максимум, даже если эти требования не выполнены.

Если же для некоторого управления существует хотя бы одно допустимое подходящее направление, то имеется возможность его улучшить, т. е. найти такую вариацию δu , для которой новое управление $u + \epsilon \delta u$ будет давать большее значение показателя качества.

Перейдем теперь непосредственно к методам возможных направлений. Рассмотрим сначала задачу без ограничений на переменные состояния.

§ 3. Случай отсутствия ограничений на переменные состояния

По-прежнему ради простоты обозначений рассмотрим задачу оптимизации конечного состояния. Задача с суммарным показателем качества решается совершенно аналогичным образом.

1. Выбор начального допустимого управления. В большинстве практических задач без ограничений на переменные состояния допустимое управление легко определяется из физических соображений. В частности, для

многих задач множество U содержит начало координат; тогда свободное движение системы $\{u(k)=0, k=0, \dots, N-1\}$ можно взять в качестве начального приближения.

Если же допустимое управление неизвестно, то для его определения, так как управляющие воздействия на каждом шаге независимы, можно воспользоваться приемом, изложенным в § 2.13. В случае однотипных (не зависящих от номера шага k) ограничений определение допустимого управления сводится к решению одной задачи

$$\begin{aligned} & \max \zeta, \\ & g_j(u) \geq \zeta \quad (j=1, \dots, m), \end{aligned}$$

которая может быть решена любым методом возможных направлений (§ 2.13) за конечное число шагов (если выполнено условие регулярности (2.3.3)).

Пусть после какого-то числа шагов найдены такие $\bar{u}, \bar{\zeta} \geq 0$, которые удовлетворяют ограничениям этой задачи. Тогда в качестве начального допустимого управления возьмем $u(k) = \bar{u} \quad (k=0, \dots, N-1)$.

2. Выбор направления. Обозначим через $\bar{x}$ траекторию, соответствующую управлению $\bar{u}$ при заданном начальном состоянии $\bar{x}(0)$, через $\bar{p}$ — последовательность сопряженных переменных, определенных из (3.1.1) с граничным условием (3.1.2). Положим $\delta u = s, s = \{s(0), \dots, s(N-1)\}$.

В качестве направления s , вообще говоря, можно выбрать любую допустимую подходящую вариацию, т. е. любую последовательность векторов $s(k)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\delta J = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\partial H(\bar{p}(k+1), \bar{x}(k), \bar{u}(k))}{\partial u(k)}, s(k) \right) > 0, \quad (3.1)$$

$$\left(\frac{\partial g_j(\bar{u}(k))}{\partial u(k)}, s(k) \right) > 0, \quad j \in J(\bar{u}(k)). \quad (3.2)$$

Здесь по-прежнему $J(\bar{u}(k))$ — множество индексов из

$j=1, \dots, m$, при которых точка $\bar{u}(k)$ обращает ограничения (1.2.2а) в равенство:

$$J(\bar{u}(k)) = \{j | j = 1, \dots, m; g_j(\bar{u}(k)) = 0\}.$$

В ограничениях (3.2) равенства исключены для того, чтобы направление $s(k)$ было направлено строго внутрь множества U (но не по касательной).

Однако для того, чтобы получить максимальное приращение показателя качества, желательно выбрать такую последовательность s , которая максимизирует (3.1) при ограничениях (3.2). Поскольку область, задаваемая неравенствами (3.2), неограничена, вектор s нужно еще нормализовать, например, положить

$$(s(k), s(k)) \leq \rho(k), \quad (3.3)$$

либо

$$|s_i(k)| \leq \rho_i(k) \quad (i=1, \dots, r). \quad (3.4)$$

Возможны другие, более сложные виды нормализации. Так как неравенства (3.1), (3.2) линейны, то для того, чтобы упростить задачу выбора направления, естественно выбрать в качестве нормализации вектора $s(k)$ также линейные ограничения, например, типа (3.4).

Далее, поскольку векторы $s(k)$ можно выбирать независимыми, а ограничения (3.3), (3.4) на $s(k)$ также независимы, то максимизация суммы (3.1) сводится к максимизации каждого из слагаемых при ограничениях (3.2), (3.4). Окончательно приходим к следующей задаче (ср. (2.13.3)):

$$\max \sigma(k), \quad (3.5)$$

$$\left(\frac{\partial H(\bar{u}(k))}{\partial u(k)}, s(k) \right) - \sigma(k) \geq 0, \quad (3.6)$$

$$\left(\frac{\partial g_j(\bar{u}(k))}{\partial u(k)}, s(k) \right) - \theta_j(k) \sigma(k) \geq 0, \quad j \in J(\bar{u}(k)), \quad (3.7)$$

$$\rho_i(k) - |s_i(k)| \geq 0, \quad \theta_j(k) > 0, \quad \rho_i(k) > 0 \quad (3.8)$$

$$(k=0, \dots, N-1; i=1, \dots, r).$$

Выбор величин $\theta_j(k) > 0$ может быть различным. В частности, можно положить все $\theta_j(k) = 1$, но можно

и увеличивать $\theta_j(k)$, если при итерациях точка $u(k)$ несколько раз попадает на одну и ту же гиперповерхность $g_j(\bar{u}(k)) = 0$.

Задача (3.5) — (3.8) является, очевидно, задачей линейного программирования. Пусть $\{\bar{\sigma}(k), \bar{s}(k)\}$ — ее решение. Если $\bar{\sigma}(k) > 0$, то

$$\left(\frac{\partial H(\bar{u}(k))}{\partial u(k)}, \bar{s}(k) \right) \geq \bar{\sigma}(k) > 0$$

при ограничениях

$$\left(\frac{\partial g_j(\bar{u}(k))}{\partial u(k)}, \bar{s}(k) \right) \geq \theta_j(k) \bar{\sigma}(k) > 0; \quad j \in J(\bar{u}(k)),$$

и в точке $\bar{u}(k)$ существуют подходящие допустимые направления, оптимальное из которых — $\bar{s}(k)$. Если $\bar{\sigma}(k) \leq 0$ для какого-то k ($k=0, \dots, N-1$), то система неравенств (3.6), (3.7) и $\bar{\sigma}(k) > 0$ несовместна, т. е. в точке $\bar{u}(k)$ подходящих допустимых направлений не существует и следует положить $\bar{s}(k) = 0$ для этого k .

Если же $\bar{\sigma}(k) \leq 0$ для всех $k=0, \dots, N-1$, то вообще для всего управления $\bar{u}$ не существует подходящей допустимой вариации, т. е. оно является локально оптимальным (см. замечание в конце § 2).

Для иллюстрации рассмотрим случай, когда управляющее воздействие одномерно, т. е. $r=1$. Множество U_k очевидно, задается в этом случае неравенствами $\alpha(k) \leq u(k) \leq \beta(k)$, где $\alpha(k)$, $\beta(k)$ ($k=0, \dots, N-1$) — фиксированные числа.

Для выбора наилучшего направления в этом случае нужно определить такую последовательность чисел $s(k)$, удовлетворяющих условиям

$$|s(k)| \leq \rho(k), \quad \rho(k) > 0$$

и

$$s(k) = \begin{cases} \text{произвольное} \\ \text{число,} & \text{если } \alpha(k) < \bar{u}(k) < \beta(k), \\ \geq 0, & \text{если } \bar{u}(k) \leq \alpha(k), \\ \leq 0, & \text{если } \bar{u}(k) \geq \beta(k), \end{cases}$$

и максимизирующих сумму

$$\sum_{k=0}^{N-1} (\bar{q}(k), s(k)),$$

где

$$\bar{q}(k) = \frac{\partial H(\bar{u}(k))}{\partial u(k)}.$$

Здесь $\rho(k)$ — заданные положительные числа. В частности, можно положить $\rho(k) = |q(k)|$.

В последнем случае получим, что векторы $\bar{s}(k)$ будут определяться соотношениями

$$\bar{s}(k) = \begin{cases} \bar{q}(k), & \text{если } \bar{q}(k) > 0, \bar{u}(k) < \beta(k), \\ -\bar{q}(k), & \text{если } \bar{q}(k) < 0, \bar{u}(k) > \alpha(k), \\ 0, & \text{если } \bar{q}(k) \geq 0, \bar{u}(k) \geq \beta(k), \\ & \text{или } \bar{q}(k) \leq 0, \bar{u}(k) \leq \alpha(k), \end{cases} \quad (3.9)$$

Другой возможный способ определения направления сводится к решению задачи

$$\max \sum_{k=0}^{N-1} q(k) s(k),$$

$$\alpha(k) \leq s(k) - \bar{u}(k) \leq \beta(k), \quad |s(k)| \leq \rho(k),$$

где, в частности, $\rho(k) = |q(k)|$.

Решение этой задачи при $\rho(k) = |q(k)|$ определяется следующими соотношениями:

$$\bar{s}(k) = \begin{cases} \beta(k) - \bar{u}(k), & \text{если } \bar{q}(k) > \beta(k) - \bar{u}(k), \\ \bar{q}(k), & \text{если } \alpha(k) \leq \bar{q}(k) - \bar{u}(k) \leq \beta(k), \\ \alpha(k) - \bar{u}(k), & \text{если } \bar{q}(k) < \alpha(k) - \bar{u}(k). \end{cases} \quad (3.10)$$

Возможно обобщение этой задачи и на многомерный случай. Если, например,

$$\alpha_i(k) \leq u_i(k) \leq \beta_i(k) \quad (i=1, \dots, r), \quad (3.11)$$

то вектор $\bar{s}(k)$ будет равен проекции градиента $\bar{q}(k)$ из

точки $\bar{u}(k)$ на r -мерный параллелепипед, задаваемый неравенствами (3.11).

Подводя итог, можно сделать вывод, что задача выбора направления в многошаговых задачах распадается на N независимых задач и, по существу, мало чем отличается от аналогичной задачи выбора наилучшего направления в одношаговых задачах (§ 2.13).

3. Выбор длины шага ε . Пусть $\bar{u}$ — некоторое допустимое управление, $\bar{s}$ — выбранное для этого управления направление. Положим

$$u = \bar{u} + \varepsilon \bar{s}, \quad \varepsilon \geq 0. \quad (3.12)$$

Таким образом, в пространстве управлений $\Omega(u)$ происходит движение вдоль вектора $\bar{s}$; при этом движение точки $x(N)$ в пространстве состояний X , если уравнения движения нелинейны, будет осуществляться по кривой, которая определяется уравнением

$$x(k+1) = f(x(k), \bar{u}(k) + \varepsilon \bar{s}(k)) \quad (k = 0, \dots, N-1), \\ x(0) = a.$$

Это движение можно производить до тех пор, пока какая-либо точка $u(k)$, определяемая из (3.12), не выйдет на границу допустимого множества U . Обозначим через ε_1 то максимальное значение длины шага, при котором еще не нарушаются ограничения $u(k) \in U$ ($k=0, 1, \dots, N-1$).

Значение ε_1 определяется из решения задач

$$\varepsilon_1(k) = \max_{\varepsilon(k)} \{ \varepsilon(k) \mid \bar{u}(k) + \varepsilon(k) \bar{s}(k) \in U \} \\ (k = 0, \dots, N-1).$$

Или

$$\varepsilon_1(k) = \max \varepsilon(k)$$

при

$$g_j(\bar{u}(k) + \varepsilon(k) \bar{s}(k)) \geq 0 \quad (j = 1, \dots, m).$$

Очевидно, ε_1 — минимальное из этих чисел, т. е.

$$\varepsilon_1 = \min_{0 \leq k \leq N-1} \varepsilon_1(k).$$

Пусть теперь ε_2 определяет максимальное значение функции $\Phi(x(N))$ при движении в пространстве $\Omega(u)$ вдоль луча $\varepsilon\bar{s}$, $\varepsilon \geq 0$. Для нахождения ε_2 нужно решить задачу

$$\begin{aligned} \max_{\varepsilon} \Phi(x(N)), \\ x(k+1) = f(x(k), \bar{u}(k) + \varepsilon\bar{s}(k)), \quad x(0) = a \\ (k = 0, \dots, N-1). \end{aligned}$$

Выпишем для этой задачи необходимые условия оптимальности. Они имеют вид

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), \bar{u}(k) + \varepsilon\bar{s}(k)), \quad x(0) = a, \\ p(k) &= \left[\frac{\partial f(x(k), \bar{u}(k) + \varepsilon\bar{s}(k))}{\partial x(k)} \right]^T p(k+1), \\ p(N) &= \frac{\partial \Phi(x(N))}{\partial x(N)}, \\ w(\varepsilon) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(p(k+1), \frac{\partial f(x(k), \bar{u}(k) + \varepsilon\bar{s}(k))}{\partial u(k)} \bar{s}(k) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Если эти уравнения невозможно решить аналитически, то для нахождения корня (3.13) можно воспользоваться следующим методом последовательных приближений. Положим $\varepsilon=0$. Если $w(0) \leq 0$, то в силу (2.11) для управления $\bar{u}(k)$ нет подходящих допустимых вариаций и оно (локально) оптимальное. Если $w(0) > 0$, то вычислим $w(\varepsilon_1)$. Если $w(\varepsilon_1) > 0$, то $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_1$ будет определять, очевидно, искомую длину шага. Если же $w(\varepsilon_1) < 0$, то положим $\varepsilon^1 = \varepsilon_1/2$ и вычислим $w(\varepsilon^1)$ и т. д.

Трудности здесь возникают, когда функция $w(\varepsilon)$ имеет несколько корней на отрезке $[0, \varepsilon_1]$. В последнем случае нужно определять либо все корни $w(\varepsilon)$ на $[0, \varepsilon_1]$ и среди них брать тот, который доставляет максимум функции $\Phi(x(N))$ на отрезке $\varepsilon\bar{s}$ ($0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$), либо брать первый (наименьший) корень $w(\varepsilon)$ на $[0, \varepsilon_1]$, сообщающий функции $\Phi(x(N))$ на $\varepsilon\bar{s}$ ($0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$), вообще говоря, только локальный максимум.

Другой возможный способ определения длины шага состоит в определении чисто поисковым путем такого

значения $\bar{\epsilon} \in [0, \epsilon_1]$, при котором новое значение показателя качества будет просто больше старого: $\Phi(\bar{x}'(N)) > \Phi(\bar{x}(N))$, где $\bar{x}'(k) = \bar{x}(k) + \bar{\epsilon}\bar{s}(k)$.

Наконец, длину шага можно определить и аналитическим путем, если осуществить вблизи управления $\bar{u}$ линейную аппроксимацию уравнений движения и квадратичную — показателя качества (см. § 6.4).

4. Получение и оценка нового управления. После того, как найдена последовательность векторов $\bar{s}(k)$ и число ϵ , новое управление $\bar{u}'$ вычисляется по формуле

$$\bar{u}'(k) = \bar{u}(k) + \bar{\epsilon}\bar{s}(k) \quad (k = 0, \dots, N-1).$$

Близость управления $\bar{u}'$ к оптимальному для случая однократных задач оценивается по формуле (1.5).

5. Одно уточнение. При построении конкретных алгоритмов по способам, рассмотренным в пп. 1—4, возможны случаи заикливания, когда, например, в процессе итераций точка $u(k)$ неоднократно возвращается на одну и ту же гиперповерхность ограничений. Чтобы избежать таких явлений, введем положительные параметры $\delta^v(k)$, зависящие от номера итерации v ($v=1, 2, \dots$). $\delta^1(k)$ выбираются произвольными достаточно малыми числами (на первой итерации можно считать все $\delta^1(k)$ равными: $\delta^1(k) = \delta^1$ ($k=0, \dots, N-1$)).

Будем считать, что точка $u(k)$ принадлежит поверхности $g_j(u(k)) = 0$, если

$$-\delta(k) < g_j(u(k)) \leq 0.$$

Определим расширенное множество индексов

$$J(\bar{u}(k), \delta(k)) = \{j \mid -\delta(k) < g_j(\bar{u}(k)) \leq 0; j = 1, \dots, m\}.$$

Заметим, что раньше было

$$J(\bar{u}(k)) = J(\bar{u}(k), 0) = \{j \mid g_j(u(k)) = 0; j = 1, \dots, m\}.$$

Таким образом,

$$J(\bar{u}(k)) \subseteq J(\bar{u}(k), \delta(k)).$$

Для определения наилучшего направления на v -й итерации будем решать для каждого k вместо задачи (3.5) — (3.8) задачу

$$\begin{aligned} & \max \sigma(k), \\ & \left(\frac{\partial H(u^v(k))}{\partial u(k)}, s(k) \right) - \sigma(k) \geq 0, \\ & \left(\frac{\partial g_j(u^v(k))}{\partial u(k)}, s(k) \right) - \theta_j(k) \sigma(k) \geq 0; \quad j \in J(u^v(k), \delta^v(k)), \\ & \rho_i(k) - |s_i(k)| \geq 0, \end{aligned}$$

где $\theta_j(k)$, $\rho_i(k)$, $\delta^v(k)$ — положительные числа ($i=1, \dots, r$; $j \in J(u^v(k), \delta^v(k))$). Эта задача отличается от задачи (3.5) — (3.8) только тем, что здесь вместо (3.7) используется расширенная система неравенств.

Пусть $\sigma^v(k)$ — решение этой задачи. Будем различать три случая:

- а) $\sigma^v(k) < -\delta^v(k)$;
- б) $-\delta^v(k) \leq \sigma^v(k) < 0$;
- в) $\sigma^v(k) = 0$.

В случае а) значение параметра $\delta^v(k)$ не меняем:

$$\delta^{v+1}(k) = \delta^v(k)$$

($\delta^{v+1}(k)$ — значение параметров $\delta(k)$ для следующей $(v+1)$ -й итерации).

В случае б) полагаем

$$\delta^{v+1}(k) = \frac{\delta^v(k)}{2}.$$

В случае в), когда $\sigma^v(k) = 0$, решаем повторно задачу (3.14), но уже при $\delta^v(k) = 0$ (т. е. задачу (3.5) — (3.8)).

Если и решение этой задачи $\sigma^v(k) = 0$, то в точке $u^v(k)$, как следует из п. 2, нет подходящих допустимых направлений. Если же $\sigma^v(k) < 0$, то полагаем для следующей итерации

$$\delta^{v+1}(k) = \frac{\delta^v(k)}{2}$$

и продолжаем процесс, двигаясь в направлении $s^v(k)$, являющемся решением задачи (3.14) при $\delta^v(k) = 0$.

6. Алгоритм. Таким образом, вычисление оптимального управления для рассматриваемой задачи складывается из следующих операций:

1) задаемся значениями параметров *)

$$\theta_j(k) > 0, \rho_i(k) > 0$$

$$(j=1, \dots, m; i=1, \dots, r; k=0, \dots, N-1);$$

2) определяем начальное допустимое управление

$$u^1 = \{u^1(k) \in U \quad (k=0, \dots, N-1)\};$$

3) задаемся последовательностью параметров $\delta^1(k) > 0$;

4) определяем множества индексов $J(u^1(k), \delta^1(k))$ ($k=0, \dots, N-1$);

5) решаем задачи линейного программирования (3.14) при $\delta^1(k)$ для $k=0, \dots, N-1$; пусть $\sigma^{11}(k), s^{11}(k)$ — решения этих задач;

6) если $\sigma^{11}(k) = 0$ для каких-то k , то повторно решаем задачу (3.10) при этих k ; пусть $\sigma^{12}(k), s^{12}(k)$ — решение этих задач;

7) определяем направление $s^1 = \{s^1(k), k=0, \dots, N-1\}$, состоящее из векторов

$$s^1(k) = \begin{cases} s^{11}(k), & \text{если } \sigma^{11}(k) < 0, \\ s^{12}(k), & \text{если } \sigma^{11}(k) = 0, \sigma^{12}(k) < 0, \\ 0, & \text{если } \sigma^{11}(k) = 0, \sigma^{12}(k) = 0; \end{cases}$$

8) если все $s^1(k) = 0$ ($k=0, \dots, N-1$), то управление u^1 (локально) оптимальное,

если не все $s^1(k) = 0$, то для $s^1 = s^1(k)$ определяем наилучшую длину шага ε^1 , как это изложено в п. 2;

9) вычисляем новое управление

$$u^2(k) = u^1(k) + \varepsilon^1(k) s^1(k) \quad (k=0, \dots, N-1);$$

10) вычисляем новые значения параметров из

$$\delta^2(k) = \begin{cases} \delta^1(k), & \text{если } \sigma^{11}(k) < -\delta^1(k), \\ \frac{1}{2} \delta^1(k), & \text{если } -\delta^1(k) \leq \sigma^{11}(k) < 0, \\ & \text{или если } \sigma^{11}(k) = 0, \sigma^{12}(k) < 0, \end{cases}$$

*) Чаше всего, $\theta_j(k) = \theta, \rho_i(k) = \rho$, но, вообще говоря, эти параметры могут зависеть от j, i, k и меняться в процессе итераций.

11) переходим к операциям 4)—10) и т. д.

Возможны другие варианты алгоритма, различающиеся конкретными способами выбора направления, длины шага и параметров алгоритма.

7. Сходимость. При сделанных предположениях относительно множества U и функций $\Phi(x)$, $f(x, u)$ (см. гл. III) нетрудно показать, что последовательность управлений сходится и имеет конечный предел u^* (это делается аналогично одношаговому случаю). В случае одноэкстремальности и регулярности исходной задачи (т. е. если выполнены условия 1—4 § 5.1) это управление будет оптимальным, т. е. доставлять показателю качества $J(x(0), u)$ глобальный максимум при данных ограничениях.

Если же задача многоэкстремальна, то практически рассматриваемый метод приводит (во всяком случае) к локальному максимуму $J(x(0), u)$, так как точек типа седла или минимума можно избежать в силу конструкции алгоритма (см. § 3.2).

В заключение заметим, что аналогичным образом строятся алгоритмы и для задач с суммарным показателем качества.

§ 4. Линейная система

Изложенный в § 3 метод проиллюстрируем на примере линейной системы вида

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k); \quad x(0) = a, \quad (4.1)$$

где управляющие воздействия $u(k)$ одномерны, b — матрица размера $(1 \times n)$, с квадратичным показателем качества (который нужно максимизировать):

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (x(k), Qx(k)),$$

где Q — неположительно определенная симметрическая матрица.

Ограничения на управление задаются в виде

$$|u(k)| \leq 1 \quad (k=0, \dots, N-1).$$

Для этой задачи на основании § 3 строится следующий алгоритм.

1. Выбираем произвольное допустимое управление u^1 ; $|u^1(k)| \leq 1$.

2. С помощью (4.1) определяем при $x(0)=a$; $u=u^1$ траекторию x^1 .

3. Определяем значения сопряженных переменных p^1 из уравнений

$$p^1(k) = Qx^1(k) + A^T p^1(k+1) \quad (k=N-1, \dots, 1), \quad (4.2)$$

$$p(N) = Qx(N).$$

4. Вычисляем величины

$$q^1(k) = -(p^1(k+1), b) \quad (k=0, \dots, N-1).$$

5. Определяем $s^1(k)$ из соотношений (см. (3.10))

$$s^1(k) = \begin{cases} 1 - u^1(k), & \text{если } q^1(k) > 1 - u^1(k), \\ q^1(k), & \text{если } |q^1(k) + u^1(k)| \leq 1, \\ -1 - u^1(k), & \text{если } q^1(k) < -1 - u^1(k). \end{cases} \quad (4.3)$$

6. Оцениваем управление u^1 из неравенств

$$J^1 + \sum_{k=0}^{N-1} \left[\max_{|u(k)| \leq 1} (q^1(k), u(k)) - (q^1(k), u^1(k)) \right] \leq J^* \leq J^1, \quad (4.4)$$

где J^* — оптимальное значение показателя качества,

$$J^1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (x^1(k), Qx^1(k)).$$

Если разность между верхней и нижней оценкой в (4.4) меньше заданного положительного числа δ либо если все $s^1(k)=0$ ($k=0, \dots, N-1$) (в этом случае $J^1 \leq J^* \leq J^1$ и u^1 — точное оптимальное управление), то процесс решения прекращается. В противном случае переходим к операции 7.

7. Вычисляем векторы

$$z^1(k) = \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} b s^1(j) \quad (k=1, \dots, N). \quad (4.5)$$

8. Определяем величину ε_0 из

$$\varepsilon_0 = \frac{\sum_{k=1}^N (z^1(k), Qz^1(k))}{\sum_{k=1}^N (z^1(k), Qx^1(k))}. \quad (4.6)$$

Находим длину шага ε^1 из условия

$$\varepsilon^1 = \min \{1, \varepsilon_0\}. \quad (4.7)$$

9. Полагаем

$$u^2(k) = u^1(k) + \varepsilon^1 s^1(k)$$

и т. д.

Сделаем несколько пояснений к алгоритму. Величина ε^1 , определяемая из (4.6), (4.7), получена из следующих соображений. Положим

$$x(k+1) = Ax(k) + b[u^1(k) + \varepsilon s^1(k)] \quad (4.8)$$

и будем искать

$$\min_{0 \leq \varepsilon \leq 1} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (x(k), Qx(k)).$$

При $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1$ получим вследствие (4.3)

$$u^1(k) + \varepsilon_1 s^1(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } q^1(k) > 1 - u^1(k), \\ u^1(k) + q^1(k), & \text{если } |u^1(k) + q^1(k)| \leq 1, \\ -1, & \text{если } q^1(k) < -1 - u^1(k). \end{cases}$$

Таким образом, значение $\varepsilon_1 = 1$ определяет границу допустимого множества управлений (куба $|u(k)| \leq 1$) в пространстве управлений $\Omega(u)$.

Далее, на основании (4.1), (4.5) и (4.8), имеем

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} b [u^1(j) + \varepsilon s^1(j)] = x^1(k) + \varepsilon z^1(k).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} J(\varepsilon) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (x^1(k), Qx^1(k)) + \varepsilon \sum_{k=1}^N (z^1(k), Qx^1(k)) + \\ + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sum_{k=1}^N (z^1(k), Qz^1(k)). \end{aligned}$$

Так как Q — положительно определенная матрица, то $J(\varepsilon)$ — выпуклая вниз функция. Определяя минимум $J(\varepsilon)$ на отрезке $[0, 1]$, приходим к (4.6), (4.7).

Оценка приближения (4.4) непосредственно получается из (1.5) и (4.1).

Заметим, что этот метод дает возможность определить оптимальное управление u^* и для вырожденных задач (см. § 3.4). Действительно, в этом случае $p^*(N) = Qx^*(N) = 0$ только на оптимальном процессе. Поэтому итерации продолжаются, пока при каком-либо управлении u^* соответствующее $x^*(N)$ не станет равным 0; в этом случае $q^*(k) = 0$ и из (4.3) следует, что $s^*(k) = 0$ ($k=0, \dots, N-1$), поэтому процесс решения задачи прекращается.

§ 5. Ограничения на переменные состояния. I

Перейдем теперь к задачам с ограничениями на переменные состояния. Рассмотрим опять задачу 1 § 3.6 и будем считать, что на переменные управления и состояния наложены ограничения (3.6.3), (3.6.4). При этом будем предполагать, что выполнены условия § 3.6.

1. Выбор начального допустимого управления. В отличие от рассмотренного в § 3 случая, выбор допустимого управления при ограничениях на переменные состояния уже не является тривиальной задачей, так как теперь ограничения на управление задаются не только в явном виде (3.6.4), но и в неявном, посредством (3.6.3) и уравнений движения (1.2.3).

Для нахождения начального допустимого управления рассмотрим следующую задачу:

$$\max \xi, \quad (5.1)$$

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \quad (k=0, \dots, N-1),$$

$$g_j(k, u(k)) \geq 0 \quad (j=1, \dots, m(k)), \quad (5.2)$$

$$h_j(k, x(k)) \geq \xi \quad (j=1, \dots, s(k)). \quad (5.3)$$

Решение этой задачи может быть получено, например, излагаемыми здесь методами возможных направлений.

Если решение u^1, x^1, ξ^1 этой задачи таково, что $\xi^1 \geq 0$, то и

$$h_j(k, x^1(k)) \geq 0 \quad (j=1, \dots, s(k)),$$

т. е. u^1 — допустимое управление. С другой стороны, если $\xi^1 < 0$, то, очевидно, допустимого управления, удовлетворяющего (1.2.3), (3.6.3), (3.6.4), для данного началь-

ного состояния не существует и нужно (если это возможно) ослабить ограничения на переменные состояния.

Заметим, что если выполнены условия регулярности Слейтера (§ 2.3), то решать задачу (5.1) — (5.3) до конца не нужно, а достаточно лишь сделать несколько шагов, пока не будет получено такое u , при котором $\zeta \geq 0$. Заметим, что часто вместо задачи (5.1) — (5.3) лучше решать задачу с ограничениями

$$g_j(k, u(k)) \geq \zeta \quad (j=1, \dots, m(k)),$$

$$h_j(k, x(k)) \geq \zeta \quad (j=1, \dots, s(k)).$$

2. Выбор направления. Пусть уже найдено некоторое допустимое управление $u^1: u^1(k) \in U_k, x^1(k) \in X_k$.

Вычислим матрицы

$$B^1(k) = \frac{\partial f(x^1(k), u^1(k), k)}{\partial u(k)} \quad (k=0, \dots, N-1), \quad (5.4)$$

$$A^1(k) = \frac{\partial f(x^1(k), u^1(k), k)}{\partial x(k)} \quad (k=1, \dots, N-1). \quad (5.5)$$

Определим множества индексов $J(u^1(k))$ и $J(x^1(k))$ (см. § 3.6) и вычислим векторы

$$\frac{\partial g_j(k, u^1(k))}{\partial u(k)}, \quad j \in J(u^1(k)) \quad (k=0, \dots, N-1), \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial h_j(k, x^1(k))}{\partial x(k)}, \quad j \in J(x^1(k)) \quad (k=1, \dots, N). \quad (5.7)$$

Введем сопряженную систему

$$p^1(i) = [A^1(i)]^T p^1(i+1) \quad (i=N-1, \dots) \quad (5.8)$$

с граничным условием

$$p^1(N) = \frac{\partial \Phi(x^1(N))}{\partial x(N)}. \quad (5.9)$$

Из (5.4) и (5.8), (5.9) получим, что

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial H(u^1(k))}{\partial u(k)} \right]^T &= [p^1(k+1)]^T B^1(k) = \\ &= [p^1(N)]^T A^1(N-1) \dots A^1(k+1) B^1(k), \end{aligned} \quad (5.10)$$

где $p^1(N)$ определяется из (5.9).

Тогда из условий оптимальности для рассматриваемой задачи (§ 3.6) и п. 2 § 3 этой главы следует, что за-

Используя сопряженную систему (5.8), можно упростить формулировку задач (5.11) — (5.14). Для этого обозначим через $p_j^1(v, k+1)$ решение сопряженной системы (5.8), когда $i=v, v-1, \dots, k+1$ при граничном условии

$$p_j^1(v) = \frac{\partial h_j(v, x^1(v))}{\partial x(v)},$$

т. е.

$$[p_j^1(v, k+1)]^T = \left[\frac{\partial h_j(v, x^1(v))}{\partial x(v)} \right]^T A^1(v-1) \dots A^1(k+1),$$

и пусть, как обычно, $p^1(k+1)$ — решение сопряженной системы (5.8) с граничным условием (5.9).

Кроме того, обозначим

$$q^1(k) = [B^1(k)]^T p^1(k+1), \quad (5.15)$$

$$q_j^1(v, k) = [B^1(k)]^T p_j^1(v, k+1). \quad (5.16)$$

Тогда задача (5.11) — (5.14) перепишется в виде

$$\begin{aligned} & \max \sigma(k), \\ & (q^1(k), s(k)) - \sigma(k) \geq 0, \\ & (q_j^1(v, k), s(k)) - \theta_j(v, k) \sigma(k) \geq 0, \quad j \in J(x^1(v)), \quad (5.17) \\ & \left(\frac{\partial g_j(k, u^1(k))}{\partial u(k)}, s(k) \right) - \theta_j(k) \sigma(k) \geq 0, \quad j \in J(u^1(k)), \\ & \rho_i(k) - |s_i(k)| \geq 0 \\ & (i=1, \dots, r; v=k+1, \dots, N; k=0, \dots, N-1). \end{aligned}$$

Задачи (5.17) лучше решать последовательно, начиная с последнего шага $k=N-1, N-2, \dots, 0$.

При этом, очевидно, векторы $p^1(k)$, $p_j^1(v, k)$ удовлетворяют сопряженной системе

$$p^1(k) = [A^1(k)]^T p^1(k+1), \quad p_j^1(v, k) = [A^1(k)]^T p_j^1(v, k+1),$$

так что переход от одной задачи линейного программирования к последующей не представляет труда.

Заметим, что в ряде случаев при решении задач линейного программирования (5.17) (или (5.11) — (5.14)) удобно использовать двойственные методы линейного программирования.

Пусть $\sigma^1(k)$, $s^1(k)$ — решение задачи (5.17). Тогда если $\sigma^1(k) > 0$, то для управления u^1 существуют подходящие допустимые направления на k -м шаге, наилучшее из которых $s^1(k)$.

Пусть теперь $\sigma^1(k) \leq 0$ при всех $k=0, 1, \dots, N-1$, тогда специальных подходящих допустимых направлений (представимых в виде $\{0, \dots, s^1(k), \dots, 0\}$, $k=0, 1, \dots, N-1$) для управления u^1 не существует, т. е. при вариации управления u^1 только на одном (произвольном) шаге $k=0, 1, \dots, N-1$ уже нельзя получить увеличения показателя качества. Если, кроме того, выполнены предположения теоремы 3.6.2 (3.6.3), то управление u^1 «локально оптимальное» и удовлетворяет условиям оптимальности теоремы 3.6.2.

Если же условие существования ненулевых специальных допустимых направлений не выполнено или его проверка затруднена, то для определения подходящего направления s^1 необходимо построение более сложных вариаций управления u^1 . В частности, варьируя управление u^1 на всех шагах $k=0, 1, \dots, N-1$ одновременно, приходим к следующей задаче линейного динамического программирования (см. § 5.11), которая определяет наилучшее направление в этом случае:

$$\begin{aligned} & \max \sigma, \\ & \sum_{k=0}^{N-1} (p^1(k+1), B^1(k)s(k)) - \sigma \geq 0, \\ & z(k+1) = A^1(k)z(k) + B^1(k)s(k), \\ & \left(\frac{\partial g_j(k, u^1(k))}{\partial u(k)}, s(k) \right) - \theta_j(k)\sigma(k) \geq 0, \quad j \in J(u^1(k)), \\ & \left(\frac{\partial h_j(k, x^1(k))}{\partial x(k)}, z(k) \right) - \theta_j(k)\sigma(k) \geq 0, \quad j \in J(x^1(k)), \\ & \rho_i(k) - |s_i(k)| \geq 0 \quad (i=1, \dots, r). \end{aligned}$$

3. Выбор длины шага. Пусть направление s^1 найдено. Определим теперь наилучшую длину шага ε^1 вдоль s^1 . Для этого прежде всего определим максимально возможную при данных ограничениях длину шага ε_1 .

Решим сначала задачи ($k=0, \dots, N-1$)

$$\max \varepsilon(k) = \varepsilon_1^u(k) \quad (5.18)$$

при

$$g_j(k, u^1(k) + \varepsilon(k)s^1(k)) \geq 0 \quad (j=1, \dots, m(k)).$$

Положим

$$\varepsilon_1'' = \min_{0 \leq k \leq N-1} \varepsilon_1''(k).$$

ε_1'' определяет максимально возможную длину шага по ограничениям на управляющие воздействия (3.6.4).

Далее решим для каждого $k=0, \dots, N-1$ задачи

$$\begin{aligned} \max \varepsilon(k) &= \varepsilon_1^x(k), \\ x(v+1) &= f(x(v), u(v), v) \quad (v=k, \dots, N-1), \\ u(k) &= u^1(k) + \varepsilon(k)s^1(k), \\ u(v) &= u^1(v) \quad (v \neq k), \\ h_j(v, x(v)) &\geq 0 \quad (j=1, \dots, s(v)). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Положим

$$\varepsilon_1^x = \min_{0 \leq k \leq N-1} \varepsilon_1^x(k).$$

ε_1^x определяет наибольшую длину шага по ограничениям (3.6.3) на состояния. Очевидно, наибольшая длина шага ε_1 при общих ограничениях определится из

$$\varepsilon_1 = \min \{\varepsilon_1^x, \varepsilon_1''\} = \min_{0 \leq k \leq N-1} \{\varepsilon_1^x(k), \varepsilon_1''(k)\}.$$

Пусть теперь ε_2 определяет максимальное значение функции $\Phi(x(N))$ при движении вдоль луча εs^1 ; $\varepsilon \geq 0$. Величина ε_2 находится из решения задачи (3.13). Заметим, что решение задач (5.19) аналогично решению задачи (3.13). Поэтому для определения $\varepsilon_1^x(k)$ могут быть использованы методы, приведенные в п. 3 § 3.

Наилучшая допустимая длина шага ε^1 определяется из условия

$$\varepsilon^1 = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}.$$

4. Получение и оценка нового управления. Новое управление, как обычно, вычисляется из равенства

$$u^2(k) = u^1(k) + \varepsilon^1 s^1(k) \quad (k=0, \dots, N-1)$$

и оценивается, в случае одноэкстремальности задачи, по формулам § 1.

Наконец, так же как и в § 3, введением параметров $\delta^u(k)$ и $\delta^x(k)$ можно избежать колебательный характер приближения. Сделаем теперь несколько заключительных замечаний.

По сравнению с задачей без ограничений на переменные состояния (§ 3) прямое применение метода возможных направлений, в данной задаче естественно, усложняется. Наиболее трудоемким он будет, если на каждом шаге на переменные $x(k)$ задается большое число (нелинейных) ограничений. В этом случае удобнее либо перейти в задаче выбора направления к двойственной, либо вообще, непосредственно использовать двойственные методы (см. §§ 8—10).

§ 6. Линейная система

В качестве иллюстрации рассмотрим линейную систему вида

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (k=0, \dots, N-1), \quad x(0) = a, \quad (6.1)$$

где A и B — матрицы размера $(n \times n)$ и $(r \times n)$ с показателем качества

$$J = (c, x(N)) \quad (6.2)$$

и ограничениями вида

$$Gu(k) \leq g, \quad (6.3)$$

где G и g — матрицы размера $(r \times m)$, $(1 \times m)$ (таким образом, допустимое множество U — выпуклое многогранное множество),

$$x(k) \geq 0. \quad (6.4)$$

Предполагаем, что существует хотя бы один процесс, удовлетворяющий (6.1), (6.3), (6.4).

Из (6.1) получим

$$x(k) = h(k) + \sum_{j=0}^{k-1} W(k-1-j) u(j), \quad (6.5)$$

где

$$h(k) = A^k x(0), \quad W(j) = A^j B.$$

1. Выбор допустимого управления. Задача выбора допустимого направления (5.1) — (5.3) в этом случае замещается следующей задачей линейного программирования:

$$\max \xi,$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} W(k-1-j) u(j) - \xi \geqslant -h(k) \quad (k=1, \dots, N), \quad (6.6)$$

$$Gu(k) \leqslant g \quad (k=0, \dots, N-1).$$

Ее можно решать непосредственно методами линейного программирования, либо использовать рассматриваемые в пп. 2, 3 методы (см. замечание в конце этого параграфа).

2. Выбор направления. Пусть u^1 — решение задачи (6.6). Определим множества индексов

$$J(u) = \left\{ j \mid \sum_{i=1}^r g_{ij} u_i = g_j, \quad j = 1, \dots, m \right\},$$

где u_i, g_j — координаты векторов u, g ; $G = [g_{ij}]$ ($i=1, \dots, r$; $j=1, \dots, m$), и $J(x) = \{j \mid x_j = 0; j=1, \dots, n\}$.

Для того чтобы не нарушить ограничения (6.3), координаты вектора $s(k)$ должны удовлетворять, очевидно, условиям

$$\sum_{i=1}^r g_{ji} s_i(k) \geqslant 0, \quad j \in J(u^1(k)). \quad (6.7)$$

Для того чтобы не нарушить ограничения (6.4), координаты вектора $s(k)$ должны удовлетворять неравенствам

$$\sum_{i=1}^r w_{ji}(v) s_i(k) \geqslant 0, \quad j \in J(x^1(k+v)), \quad (6.8)$$

где

$$W(v) = [w_{ji}(v)] \quad (j=1, \dots, n; i=1, \dots, r; v=0, \dots, N-k).$$

Действительно, положим $u(v) = u^1(v) + \varepsilon(v) s^1(v)$, где $\varepsilon(v) = 0, v \neq k, \varepsilon(k) > 0$. Тогда из (6.5) следует, что $x(k+v) = x^1(k+v) + \varepsilon(k) W(v) s^1(k)$. Отсюда и из определения допустимого направления получим (6.8). Неравенства (6.8) можно получить и непосредственно из общей задачи выбора направления (5.11) — (5.14), так как вследствие линейности ограничений в ней можно положить $\theta_j(v, k) = 0$.

Для того чтобы вектор $s(k)$ был подходящим, он должен удовлетворять неравенству

$$(p(k+1), Bs(k)) \geq 0, \quad (6.9)$$

где векторы $p(k)$ удовлетворяют сопряженной системе

$$p(k) = A^T p(k+1), \quad p(N) = c. \quad (6.10)$$

Или

$$(q(k), s(k)) \geq 0, \text{ где } q(k) = B^T p(k+1).$$

Кроме того, вектор $s(k)$ должен быть нормализован; например, он может удовлетворять ограничениям

$$|s_i(k)| \leq 1 \quad (i=1, \dots, r). \quad (6.11)$$

Таким образом, для выбора наилучшего возможного направления нужно решить следующие задачи линейного программирования:

$$\max \sum_{i=1}^r q_i(k) s_i(k),$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r g_{ji} s_i(k) &\geq 0, \quad j \in J(u^1(k)); \\ \sum_{i=1}^r w_{ji}(v) s_i(k) &\geq 0, \quad j \in J(x^1(k)) \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$(v=0, 1, \dots, N-k; k=0, 1, \dots, N-1).$$

Здесь параметр $\sigma(k)$ (см. § 5) можно исключить из-за линейности исходной задачи.

Заметим, что в задаче (6.12) часто выгоднее использовать другие нормализации, чем (6.11), например, вида

$$\sum_{i=1}^r q_i(k) s_i(k) \leq 1$$

или

$$\begin{aligned} s_i(k) &\leq 1, \text{ если } q_i(k) > 0, \\ s_i(k) &\geq -1, \text{ если } q_i(k) < 0. \end{aligned}$$

3. Выбор длины шага. Пусть $s^1(k)$ — решение задач (6.12). Если все $(q(k), s^1(k)) = 0$, то u^1 — оптимальное управление; если $(q(k), s^1(k)) > 0$ для некоторых k , то

для этих k решим задачи линейного программирования вида

$$\begin{aligned} \max \varepsilon(k), \\ x^1(k+v) + \varepsilon(k) W(v) s^1(k) \geq 0, \\ G[u^1(k) + \varepsilon(k) s^1(k)] \geq g \\ (v=0, \dots, N-k; k=0, 1, \dots, N-1). \end{aligned}$$

Положим $\varepsilon^1 = \min_{0 \leq k \leq N-1} \{\varepsilon(k)\}$. Считаем, что $\varepsilon^1 < \infty$.

Величина ε^1 определяет наибольшую длину шага вдоль направления s^1 при данных ограничениях. Так как линейная форма без ограничений имеет максимум в ∞ , то, очевидно, ε^1 — наилучшая допустимая длина шага. Поэтому положим $u^2(k) = u^1(k) + \varepsilon^1 s^1(k)$ и т. д., пока не будет получено, что $(q(k), s(k)) = 0$ ($k=0, \dots, N-1$).

В заключение заметим, что рассматриваемая задача является задачей линейного программирования, которую вследствие (6.5) можно представить в виде

$$\max \sum_{j=0}^{N-1} (c, W(N-1-j) u(j))$$

при ограничениях

$$\sum_{j=0}^{k-1} W(k-1-j) u(j) \geq -h(k), \quad (6.13)$$

$$Gu(k) \leq g \quad (k=1, \dots, N).$$

Однако если размерности векторов $u(k)$, $x(k)$ и число шагов N велики, то задача линейного программирования (6.13) будет иметь большой размер, и ее решение может представить затруднение. Рассмотренный же метод сводит решение исходной задачи (6.1) — (6.4) (или (6.13)) к решению задач линейного программирования меньшего размера и является, по существу, методом декомпозиции для рассматриваемой задачи.

§ 7. Ограничения в виде равенств

Рассмотрим теперь задачи, в которых ограничения на переменные состояния задаются только на последнем шаге и в виде равенств.

Пусть они имеют вид

$$\varphi_j(x(N)) = 0 \quad (j=1, \dots, m < n). \quad (7.1)$$

В частности,

$$x(N) = b. \quad (7.2)$$

Кроме того,

$$u(k) \in U_k \quad (k=0, 1, \dots, N-1). \quad (7.3)$$

Здесь $\varphi_j(x)$ — функции с непрерывными частными производными, причем градиенты этих функций $\partial\varphi_j(x)/\partial x$ ($j=1, \dots, m$) линейно независимы при любых x из E^n . Таким образом, в этом случае $X_k = E^n$ ($k=1, \dots, N-1$), а X_N — гладкое многообразие размерности $n-m$, задаваемое равенствами (7.1).

Рассмотрим сначала случай ограничений (7.1) и для простоты будем считать, что $m=1$, т. е. конечное состояние должно лежать на поверхности

$$\varphi(x(N)) = 0. \quad (7.4)$$

Для того чтобы найти допустимое управление (т. е. переводящее $x(0)=a$ на поверхность (7.4)), возьмем произвольное управление u , удовлетворяющее (7.3), и найдем соответствующее конечное состояние $x(N)$. Если для этого состояния $\varphi(x(N)) > 0$, то методами возможных направлений (§ 3) будем минимизировать $\varphi(x(N))$ по всем управлениям, удовлетворяющим (7.3); если же $\varphi(x(N)) < 0$, то ищем максимум $\varphi(x(N))$. Так как эти методы обеспечивают последовательное увеличение (или уменьшение) функционала, то, очевидно, этим способом найдется управление, удовлетворяющее (7.3), (7.4).

Пусть u^1 — такое управление. Так как множество X_N , определяемое равенством (7.4), не содержит внутренних точек, то здесь уже нельзя варьировать управление только на одном шаге ($\delta u^1(k) \in K(u^1(k))$; $\delta u^1(j) = 0$; $j \neq k$), так как такая специальная вариация почти всегда будет выводить точку $x^1(N)$ за пределы множества X_N , т. е. не будет допустимой по ограничению (7.4). Поэтому в этом случае нужно варьировать управление u^1 на нескольких шагах одновременно, с тем чтобы соответствующая вариация $\delta x^1(N)$ конечного состояния была бы направлена по касательной к поверхности (7.4) (т. е.

принадлежала бы конусу допустимых вариаций в широком смысле $M(x^1(N))$ в точке $x^1(N)$.

Уравнение касательной к поверхности (7.4) в точке $x^1(N)$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial \varphi(x^1(N))}{\partial x(N)}, \delta x^1(N) \right) = 0. \quad (7.5)$$

Таким образом, задача выбора наилучшего направления в этом случае уже не распадается, как в §§ 3—6, а имеет вид

$$\max \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\partial H(u^1(k))}{\partial x(k)}, s(k) \right) \quad (7.6)$$

при условиях

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1} W^1(N-1, k) s(k), \frac{\partial \varphi(x^1(N))}{\partial x(N)} \right) = 0, \quad (7.7)$$

$$s(k) \in K(u^1(k)) \quad (k=0, \dots, N-1). \quad (7.8)$$

Кроме того, как обычно, векторы $s(k)$ должны быть нормализованы.

Здесь функция Гамильтона

$$H(u(k)) = H(p(k+1), x(k), u(k))$$

определена из (3.1.3), а переменные $p(k)$ — из (3.1.1), (3.1.2). Направление $z^1(N)$ изменения $x^1(N)$ определяется из уравнения

$$z^1(N) = \sum_{k=0}^{N-1} W^1(N-1, k) s^1(k), \quad (7.9)$$

где

$$W^1(v, k) = A^1(v) A^1(v-1) \dots A^1(k+1) B^1(k),$$

$$W^1(k, k) = B^1(k) \quad (v=k+1, \dots, N-1)$$

— матрицы размера $(r \times n)$. Соотношение (7.9) вытекает из рекуррентного уравнения

$$z^1(k+1) = A^1(k) z^1(k) + B^1(k) s^1(k); \quad z^1(0) = 0,$$

где матрицы $A^1(k)$ и $B^1(k)$ определены из (5.4), (5.5) на процессе u^1, x^1 .

Задача (7.6)—(7.8) при соответствующей нормализации векторов $s(k)$ является задачей линейного програм-

мирования, и из-за наличия общего ограничения (7.7) она уже не распадается на отдельные независимые подзадачи типа (3.5) — (3.8).

Однако если использовать методы декомпозиции линейного программирования в этой задаче, то ее решение сведется к решению отдельных подзадач типа (3.5) — (3.8), связанных между собой простым образом.

Не вдаваясь в детали, опишем общую идею этого метода. Рассмотрим вместо задачи (7.6) — (7.8) двойственную ей задачу

$$\begin{aligned} \min_{\lambda} \max_s \sum_{k=0}^{N-1} & \left[\left(\frac{\partial H(u^1(k))}{\partial u(k)}, s(k) \right) + \right. \\ & \left. + \lambda \left(\frac{\partial \varphi(x^1(N))}{\partial x(N)}, W^1(N-1, k) s(k) \right) \right] = \\ = \min_{\lambda} \sum_{k=0}^{N-1} \max_{s(k) \in S^1(k)} & \left(\frac{\partial H(u^1(k))}{\partial u(k)} + \right. \\ & \left. + \lambda [W^1(N-1, k)]^T \frac{\partial \varphi(x^1(N))}{\partial x(N)}, s(k) \right). \quad (7.10) \end{aligned}$$

Здесь через $S^1(k)$ обозначена область значений векторов $s(k)$, удовлетворяющих (7.8) и условиям нормализации. При соответствующей нормализации $S^1(k)$ — выпуклые многогранники.

Решение двойственной задачи (7.10) уже не представляет труда. Выберем некоторое $\lambda = \lambda_{11}$ и для этого λ_{11} решаем N задач линейного программирования:

$$\max \left(\frac{\partial H(u^1(k))}{\partial u(k)} + \lambda_{11} [W^1(N-1, k)]^T \frac{\partial \varphi(x^1(N))}{\partial x(N)}, s(k) \right),$$

$$s(k) \in S^1(k) \quad (k=0, \dots, N-1).$$

Зная решения $s^{11}(k)$ этих задач, можно провести уточнение λ_{11} , например, по формуле

$$\lambda_{12} = \lambda_{11} - \gamma_1 \sum_{k=0}^{N-1} \left([W^1(N-1, k)]^T \frac{\partial \varphi(x^1(N))}{\partial x(N)}, s^{11}(k) \right)$$

($\gamma_1 > 0$) и т. д., пока не будет получено решение задачи (7.10): $\lambda_1, s^1(k) \in S^1(k)$. Векторы $s^1(k)$ в силу соотношений двойственности удовлетворяют равенству (7.7) и максимизируют (7.6). Являясь, таким образом, решением задачи (7.6) — (7.8), они определяют наилучшее допустимое направление в этом случае.

Аналогичным образом решается и общий случай ограничений (7.1), когда $m > 1$.

Перейдем теперь к задаче, когда конечное состояние процесса $x(N)$ задано, т. е. должно выполняться равенство (7.7). В этом случае задачу оптимизации конечного состояния рассматривать не имеет смысла, поэтому будем считать, что показатель качества задается в виде суммы (1.3.6).

Для того чтобы определить допустимое управление, переводящее $x(0) = a$ в b , достаточно решить (например, методами § 3) задачу минимизации рассогласования $(x(N) - b, x(N) - b)$ на траекториях системы. Пусть u^1 — такое управление. Так же, как и в предыдущей задаче, здесь уже нельзя использовать специальные вариации управления u^1 только на одном шаге, потому что для них всегда $\delta x^1(N) \neq 0$, а следует рассматривать общую вариацию управления $\delta u^1(k)$ ($k=0, \dots, N-1$), при которой соответствующее $\delta x^1(N) = 0$.

Таким образом, задача выбора наилучшего направления в этом случае сводится к задаче линейного программирования вида

$$\max \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\partial H(u^1(k))}{\partial u(k)}, s(k) \right) \quad (7.11)$$

при условиях

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^1(N-1, k) s(k) = 0, \quad (7.12)$$

$$s(k) \in S^1(k) \quad (k=0, \dots, N-1), \quad (7.13)$$

где функция Гамильтона $H(u^1(k)) = H(p^1(k+1), x^1(k), u^1(k))$ определена из (3.1.11), а переменные p^1 — из (3.1.9), (3.1.10).

Задача (7.11) — (7.13) аналогична задаче (7.6) — (7.8) и может быть решена теми же методами, что и первая задача. Однако, в отличие от задачи (7.6) — (7.8), задача (7.11) — (7.13) имеет не одно общее ограничение, а n общих ограничений (7.12), что, естественно, усложняет ее.

Таким образом, в этом параграфе для того, чтобы управление на каждой итерации удовлетворяло ограничениям в виде равенств, были построены особые допустимые вариации управления, нахождение которых уже не является такой легкой задачей, как, например, для случая § 3. Однако на практике часто и не требуется

точного выполнения ограничений в виде равенств, а достаточно выполнения их лишь с некоторой точностью. Поэтому вместо решения задачи с ограничениями в виде равенств (7.1), (7.2) можно решать задачу с ограничениями, например, вида

$$-\delta_{1j} \leq \varphi_j(x(N)) \leq \delta_{2j} \quad (j = 1, \dots, m), \quad (7.14)$$

$$-\delta'_{1i} \leq x_i(N) - b_i \leq \delta'_{2i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (7.15)$$

где неотрицательные числа δ_{1j} , δ_{2j} , δ'_{1i} , δ'_{2i} характеризуют требуемую степень точности выполнения равенств (7.1) и (7.2). Решение же задач с ограничениями в виде неравенств часто оказывается проще и может быть получено комбинацией методов §§ 5 и 7.

§ 8. Метод штрафных функций

В предыдущих параграфах было видно, что учет ограничений на управление, задаваемых посредством различного рода условий на переменные состояния, не является простой задачей (см., например, §§ 5, 7).

Здесь будет кратко изложен общий прием, который позволяет просто учитывать любые ограничения, вводя в показатель качества дополнительные члены, определяющие «штраф» за нарушение данного ограничения. Этот прием, различные реализации которого объединяются в метод штрафных функций, в настоящее время получает все большее распространение и значение. Это объясняется тем, что метод штрафных функций дает одну из наиболее простых и в то же время общих схем (сюда, в частности, укладываются и методы, использующие множители Лагранжа) учета ограничений в задачах оптимизации. Недостаток метода — трудность получения точного решения, поэтому его наиболее целесообразно использовать в сочетании с другими методами.

Рассмотрим сначала одношаговую задачу оптимизации (см. гл. II):

$$\max_{x \in R} \Phi(x), \quad (8.1)$$

где множество R предполагается ограниченным и замкнутым, а функция $\Phi(x)$ — непрерывной на R .

Введем функцию

$$\chi(x) \begin{cases} = 0, & \text{если } x \in \bar{R}, \\ > 0, & \text{если } x \notin \bar{R}, \end{cases} \quad (8.2)$$

и вместо задачи (8.1) рассмотрим задачу

$$\max_{x \in E^n} \Phi(x, \lambda), \quad (8.3)$$

где

$$\Phi(x, \lambda) = \Phi(x) - \lambda \chi(x). \quad (8.4)$$

Пусть $x(\lambda)$ — решение (8.3) при фиксированном λ . Следующее утверждение, которое здесь приводится без доказательства, дает обоснование метода штрафных функций.

Теорема 8.1. *Существует предел*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} x(\lambda) = x^*,$$

причем в точках $x^* \in R$ функция $\Phi(x)$ достигает своего максимального значения на множестве R и

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \max_{x \in E^n} \Phi(x, \lambda) = \Phi(x^*). \quad (8.5)$$

Рассмотрим теперь несколько примеров использования метода штрафных функций для решения задач дискретного управления.

Пусть ограничения на переменные состояния задаются в виде (1.2.1а). Тогда решение исходной задачи можно заменить решением задачи максимизации показателя качества вида

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x(k), u(k), k) + \sum_{k=0}^N \sum_{j=1}^{s(k)} \chi(h_j(k, x(k))), \quad (8.6)$$

где функции $\chi(z)$ малы (по сравнению с первой суммой (8.6)) при положительных z и велики при отрицательных z . Например, можно положить

$$\chi(z) = \frac{1}{\lambda e^{-\lambda z}},$$

или

$$\chi(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \geq 0, \\ \lambda z, & \text{если } z < 0. \end{cases}$$

Здесь λ — достаточно большое положительное число.

Задача с показателем качества (8.6) уже не имеет ограничений на переменные состояния.

Рассмотрим теперь задачу § 7 с ограничениями на конечное состояние вида (7.1). В этом случае введение показателя качества

$$J(\lambda) = \Phi(x(N)) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \Phi_j^2(x(N)), \quad (8.7)$$

где $\lambda_j > 0$ ($j=1, \dots, m$), позволяет свести исходную задачу к задаче со свободным концом траектории.

Для решения полученных выше задач могут быть использованы методы возможных направлений, изложенные в § 3.

В ряде случаев целесообразно учитывать динамику, задаваемую уравнениями движения (1.3.2), также с помощью методов штрафных функций. В этом случае вместо решения задачи 1' § 1.3, например, приходим к решению последовательности задач на безусловный экстремум вида

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \infty \\ \mu \rightarrow \infty}} \max_{u, x} \left\{ \Phi(x(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i(k) [x_i(k+1) - f_i(x(k), u(k), k)]^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{m(k)} \chi[\mu_j(k) g_j(x(k), u(k), k)] \right\}.$$

Близким к методу штрафных функций является введение невязок в ограничения и последовательной минимизации этих невязок (точнее, монотонной функции от них). Так, при решении задач с ограничениями на переменные состояния полезно рассматривать вспомогательную задачу с уравнениями движения

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k) + v(k) \quad (k=0, 1, \dots, N-1),$$

где вектор $v(k) \in E^n$ является дополнительным управляющим воздействием, и показателем качества

$$J(u, v) = \Phi(x(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i(k) v_i^2(k).$$

§ 9. Двойственные методы

Так же, как и для одношаговых задач, вид двойственных методов существенно зависит от того, в каком пространстве используется принцип двойственности.

1. Рассмотрим сначала задачу 1 § 5.1, удовлетворяющую условиям одноэкстремальности и регулярности 1—4 § 5.2. В этом случае решение исходной задачи 1 может быть заменено решением двойственной, которая имеет вид

$$\min \psi(p). \quad (9.1)$$

где

$$\psi(p) = \max_{u, x} \left[\Phi(x(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} (p(k+1), x(k+1) - f(x(k), u(k), k)) \right]. \quad (9.2)$$

Фиксируем некоторую последовательность $p^1 \neq 0$, $p^1 = \{p^1(0), \dots, p^1(N)\}$ и для $p = p^1$ решим задачу (9.2). Эта задача, очевидно, распадается на $N+1$ подзадачу (см. § 5.8) вида

$$\max_{x(N) \in X_h} [\Phi(x(N)) - (p^1(N), x(N))], \quad (9.3)$$

$$\max_{x(k) \in X_h} \max_{u(k) \in U_k} [H(p^1(k+1), x(k), u(k), k) - (p^1(k), x(k))] \quad (k=0, \dots, N-1). \quad (9.4)$$

Пусть u^1, x^1 — решение задач (9.3), (9.4). Нетрудно видеть, что градиент функции $\psi(p)$ по $p(k+1)$ («обычный» или обобщенный, см. § 2.15) имеет вид

$$\frac{\partial \psi(p^1)}{\partial p(k+1)} = -x^1(k+1) + f(x^1(k), u^1(k), k) \quad (9.5)$$

$$(k=0, \dots, N-1).$$

Из (9.5) получим алгоритм для нахождения оптимальной последовательности p^* :

$$p^{v+1}(k+1) = p^v(k) + \epsilon^v [x^v(k+1) - f(x^v(k), u^v(k), k)] \quad (9.6)$$

$$(v=1, 2, \dots).$$

Здесь $u^v(k)$, $x^v(k)$ — решение задач (9.3), (9.4). Длину шага ϵ^v можно выбирать постоянной, если это решение единственно, и удовлетворяющую условиям (2.15.13) в противном случае.

Таким образом, решение исходной задачи свелось к решению ряда относительно простых задач (9.3), (9.4), связанных между собой также простым образом (9.6). Заметим, что уравнения движения (5.1.4), описывающие процесс, вначале выполненными не предполагаются, и только в процессе итераций находится такая последовательность p^* , при которой эти уравнения становятся уже справедливыми, а показатели качества прямой и двойственной задач принимают (равные) оптимальные значения.

2. Зададим теперь функцию Лагранжа в виде (см. § 5.7)

$$\begin{aligned} F(u, x, p, \lambda, \mu) = \\ = \Phi(x(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} (p(k+1), x(k+1) - f(x(k), u(k), k)) + \\ + \sum_{k=0}^N (\lambda(k), h(k, x(k))) + \sum_{k=0}^{N-1} (\mu(k), g(k, u(k))), \quad (9.7) \end{aligned}$$

где векторы $\lambda(k)$ и $\mu(k)$ состоят из неотрицательных компонент

$$\lambda_j(k), \mu_i(k) \quad (j=1, \dots, s(k); i=1, \dots, m(k)).$$

Двойственная задача для функции Лагранжа (9.7) имеет вид (§ 5.7)

$$\min_p \min_{\lambda \geq 0} \min_{\mu \geq 0} \psi(p, \lambda, \mu), \quad (9.8)$$

где

$$\psi(p, \lambda, \mu) = \max_{u, x} F(u, x, p, \lambda, \mu), \quad (9.9)$$

причем на переменные u , x не накладывается уже никаких ограничений.

Задача (9.9), как нетрудно видеть, распадается на отдельные задачи

$$\max_{x(N)} [\Phi(x(N)) - (p(N), x(N)) + (\lambda(N), h(N, x(N)))], \quad (9.10)$$

$$\begin{aligned} \max_{u(k)} \max_{x(k)} [II(p(k+1), x(k), u(k), k) - (p(k), x(k)) + \\ + (\lambda(k), h(k, x(k))) + (\mu(k), g(k, u(k)))] \quad (9.11) \\ (k=0, \dots, N-1). \end{aligned}$$

Так как в задачах (9.10), (9.11) не наложено каких-либо ограничений на переменные, то в силу предположений § 5.8 следующие условия необходимы и достаточны для того, чтобы u и x были решением задач (9.10), (9.11):

$$p(N) = \frac{\partial \Phi(x(N))}{\partial x(N)} + \left[\frac{\partial h(N, x(N))}{\partial x(N)} \right]^T \lambda(N), \quad (9.12)$$

$$p(k) = \left[\frac{\partial f(x(k), u(k), k)}{\partial x(k)} \right]^T p(k+1) + \left[\frac{\partial h(k, x(k))}{\partial x(k)} \right]^T \lambda(k), \quad (9.13)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial f(x(k), u(k), k)}{\partial u(k)} \right]^T p(k+1) + \left[\frac{\partial g(k, u(k))}{\partial u(k)} \right]^T \mu(k) = 0 \\ (k=0, 1, \dots, N-1). \end{aligned} \quad (9.14)$$

В этом случае метод, аналогичный методу п. 1 этого параграфа, состоит в следующем.

1. Выбираем произвольные последовательности p^1 , $\lambda^1 \geq 0$, $\mu^1 \geq 0$.

2. При этих значениях p^1 , λ^1 и μ^1 из (9.12) — (9.14) определяем последовательности u^1 , x^1 .

3. Находим новые значения p^2 , λ^2 и μ^2 из выражений

$$\begin{aligned} p^2(k+1) &= p^1(k+1) + \varepsilon_1^1 [x^1(k+1) - f(x^1(k), u^1(k), k)], \\ \lambda^2(k+1) &= \max\{0, \lambda^1(k) - \varepsilon_2^1 h(k, x^1(k))\}, \\ \mu^2(k+1) &= \max\{0, \mu^1(k) - \varepsilon_3^1 g(k, u^1(k))\} \end{aligned}$$

и т. д.

Таким образом, в двойственных методах, рассмотренных в этом параграфе, осуществляется приближение к оптимуму по сопряженным переменным, удовлетворяющим (явно и неявно) сопряженной системе (9.12), (9.13). В то же время «прямые» уравнения движения (5.1.4) выполненными вначале не предполагаются.

§ 10. Линейная система

Применим рассмотренный метод для максимизации показателя качества

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} f_{10}(x(k)) + \sum_{k=0}^{N-1} f_{20}(u(k)),$$

где $f_{10}(x)$ и $f_{20}(u)$ — строго выпуклые вверх функции, на процессе, описываемом линейным уравнением вида

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \quad (10.1)$$

при ограничениях

$$x(k) \in X_k \quad (k=0, \dots, N), \quad (10.2)$$

$$u(k) \in U_k \quad (k=0, \dots, N-1), \quad (10.3)$$

где X_k, U_k — выпуклые множества.

1) Выберем произвольную последовательность p^1 (не все $p^1(k)=0$) и решим задачи ($k=0, \dots, N-1$)

$$\max_{x(k) \in X_k} [f_{10}(x(k)) + (p^1(k+1), A(k)x(k))], \quad (10.4)$$

$$\max_{u(k) \in U_k} [f_{20}(u(k)) + (p^1(k+1), B(k)u(k))]. \quad (10.5)$$

Так как функции $f_{10}(x)$ и $f_{20}(u)$ строго выпуклы, то решение этих задач единственно. Обозначим его через x^1 и u^1 .

2) Зная x^1 и u^1 , найдем новые значения $p^2(k+1)$ из

$$p^2(k+1) = p^1(k+1) + \varepsilon^1 [x^1(k+1) - A(k)x^1(k) - B(k)u^1(k)] \quad (10.6)$$

($k=0, \dots, N-1$).

Процесс решения прекращается, как только будет найдена такая последовательность p^* , для которой соответствующие u^* , x^* , являющиеся решением задач (10.4), (10.5), будут удовлетворять уравнениям движения (10.1).

Этот же алгоритм можно применять и для случая не строго выпуклых функций $f_{10}(x)$ и $f_{20}(u)$. Например, если эти функции линейны, а U_k, X_k — выпуклые многогранные множества, то решение исходной задачи сводится к

последовательному решению задач линейного программирования (10.4), (10.5) меньшего размера, причем длину шага в (10.6) нужно уже выбирать специальным образом (см. § 2.15).

Двойственным методам часто можно дать физическую интерпретацию. Например, пусть решается задача планирования, рассмотренная в п. 1 § 1.1. Уравнения, описывающие процесс, в этом случае имеют вид

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) - s(k), \quad (10.7)$$

где переменные $u(k)$ означают интенсивности использования производственных мощностей, переменные $x(k)$ — количество готовой продукции, хранящейся на складе, $s(k)$ — количество проданной продукции и переменные $p(k)$ — некоторые цены.

Планирующий орган отвечает за сбалансированность запасов, выпуска и продажи, т. е. за выполнение уравнений (10.7). Кроме того, он стремится получить такую последовательность оптимальных интенсивностей $u(k)$ в течение планового периода ($k=0, \dots, N-1$), при которых общая прибыль системы J максимальна.

Делать это он может, рассчитав оптимальный план u^* (например, прямыми методами §§ 5, 6) и «спустив» этот план предприятиям. Это — прямой метод решения. При таком методе существен жесткий контроль за выполнением оптимального плана u^* .

Двойственный метод решения задачи показывает, что оптимального плана можно достичь другим способом. При этом планирующий орган спускает некоторые цены $p^1(k)$ предприятиям, выпускающим готовую продукцию, и базам, ее хранящим. Предприятия максимизируют свою прибыль из (10.5), а базы — из (10.4) — свою. При небалансе ($x^1(k+1) - Ax^1(k) - Bu^1(k) - s'(k) \neq 0$) планирующий орган назначает новые цены согласно (10.6).

§ 11. Приближение по граничным условиям

Двойственные методы, изложенные в §§ 9, 10, имели тот недостаток, что в них прямые уравнения движения (1.2.3) выполняются только на оптимальном процессе.

Если это физически не обосновано, то тогда любое приближенное решение двойственной задачи не будет допустимым для исходной и, следовательно, не представляет большой ценности. В то же время как прямые, так и сопряженные уравнения имеют простую рекуррентную структуру и их желательно использовать в процессе вычислений.

Такие методы будут рассмотрены в этом и последующих параграфах. Они используют условия оптимальности главы IV и §§ 8—10 главы V. Поскольку в них осуществляется одновременное решение прямой и двойственной задач, эти методы формально можно отнести к третьей группе (см. Введение гл. VI).

Рассмотрим сначала задачу максимизации конечного состояния

$$J = \Phi(x(N)),$$

где $\Phi(x)$ — выпуклая вверх функция, на процессе

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), & x(0) &= a, \\ u(k) &\in U & (k=0, \dots, N-1), \end{aligned} \quad (11.1)$$

где U — выпуклое множество.

Будем предполагать, что матрица A — неособая, т. е. ее определитель не равен 0.

Так как ограничений на переменные состояния нет, то в этом случае естественно сразу использовать как прямые уравнения движения (11.1), так и сопряженные, которые в данном случае имеют вид

$$p(k) = A^T p(k+1) \quad (k=N-1, \dots, 1). \quad (11.2)$$

Рассматриваемая задача, как показано в § 1.4, сводится к задаче

$$\max_{x(N) \in R_N(a)} \Phi(x(N)), \quad (11.3)$$

где $R_N(a)$ — множество достижимых за N шагов состояний из $x(0)=a$ для этой задачи. Оно выпукло в силу выпуклости множества U и линейности уравнений (11.1).

Поэтому к задаче (11.3) можно применить двойственный метод, изложенный в п. 1 § 2.15.

Для этого прежде всего «обернем» время в сопряженной системе

$$p(k+1) = A^* p(k) \quad (k=1, \dots, N-1). \quad (11.4)$$

где $A^* = (A^{-1})^T$. Это можно сделать, так как матрица A неособая.

1. Выберем теперь произвольное начальное состояние $p^1(1)$ сопряженной системы (11.4) и для $p(1) = p^1(1)$ найдем из (11.4) последовательность $p^1(2), \dots, p^1(N)$.

2. Определим управление u^1 из решения задач

$$\max_{u(k) \in U} (p^1(k+1), Bu(k)) \quad (k=0, \dots, N-1). \quad (11.5)$$

3. Зная $u^1(k)$ — решение задач (11.5), — найдем из (11.1) соответствующую траекторию x^1 при $x(0) = a$.

4. Вычислим $\partial\Phi(x^1(N))/\partial x(N)$. Если

$$\frac{\partial\Phi(x^1(N))}{\partial x(N)} = p^1(N), \quad (11.6)$$

то в силу теоремы 4.5.1 u^1 — оптимальное управление.

Если же

$$\frac{\partial\Phi(x^1(N))}{\partial x(N)} \neq p^1(N),$$

то изменим $p^1(N)$ по формуле (см. § 2.15):

$$p^2(N) = p^1(N) + \varepsilon \left(\frac{\partial\Phi(x^1(N))}{\partial x(N)} - p^1(N) \right). \quad (11.7)$$

Или

$$p^2(N) = p^1(N) + \varepsilon q^1(N), \text{ где } q^1(N) = \frac{\partial\Phi(x^1(N))}{\partial x(N)} - p^1(N).$$

5. Соответствующее изменение начального состояния сопряженной системы определится из (11.2):

$$p^2(1) = p^1(1) + \varepsilon (A^N)^T q^1(N) \quad (11.8)$$

и т. д., пока не будет найден такой процесс $\{u^*, x^*, p^*\}$, при котором справедливо равенство (11.6) и который в силу теорем § 5 будет оптимальным для начального состояния $x(0) = a$.

Аналогичный метод в принципе можно использовать и для нелинейных систем общего вида (1.2.3). Рассмотрим

для определенности, задачу оптимизации конечного состояния § 4.2.

Будем предполагать, что множества $f(x, U)$ выпуклы при всех x для этой задачи, т. е. на оптимальном управлении справедлив принцип максимума (см. § 4.2). Кроме того, допустим, что из условий

$$\max_{u(k) \in U} H(p(k+1), x^1(k), u(k)) = H(p(k+1), x^1(k), u^1(k)), \quad (11.9)$$

$$\left[\frac{\partial f(x^1(k), u(k))}{\partial x(k)} \right]^T p(k+1) = p^1(k) \quad (11.10)$$

однозначно определяются $p^1(k+1)$ и $u^1(k)$ при фиксированных значениях $p^1(k)$ и $x^1(k)$. В этом случае, задаваясь начальными состояниями прямой и сопряженной системы: $p(1) = p^1(1)$, $x(0) = a$, из (11.9), (11.10) и (1.2.3) последовательно находим значения $u^1(0)$, $x^1(1)$, $p^1(2)$, $u^1(1)$, ..., пока не будут найдены $p^1(N)$ и $\partial \Phi(x^1(N))/\partial x(N)$. Новое значение $p^2(N)$ (или $p^2(1)$) вычисляется так же, как и в линейном случае (см. (11.7), (11.8)).

Решение системы (11.9), (11.10) упрощается, если уравнения движения имеют вид

$$x(k+1) = f_1(x(k)) + f_2(u(k)). \quad (11.11)$$

В этом случае (11.10), (11.9) переходят в

$$\left[\frac{\partial f_1(x^1(k))}{\partial x(k)} \right]^T p^1(k+1) = p^1(k), \quad (11.12)$$

$$\max_{u(k) \in U} (p^1(k+1), f_2(u(k))) = (p^1(k+1), f_2(u^1(k))). \quad (11.13)$$

Задаваясь значениями $p^1(1)$ и $x(0) = a$, из (11.13) определяем $u^1(0)$, затем из (11.11) — $x^1(1)$, а из (11.12) — $p^1(2)$ и т. д., т. е. здесь процедура определения $p^1(N)$ и $x^1(N)$ мало отличается от аналогичной процедуры в линейной системе. Здесь также нужно предполагать, что матрицы $\partial f_1(x)/\partial x$ — неособые при любых x .

Таким образом, во всех рассмотренных выше схемах из принципа максимума и уравнений прямой и сопряженной систем по значениям начальных состояний a и $p^1(1)$ определяются конечные значения $x^1(N)$ и $p^1(N)$.

Если при этих значениях справедливо равенство (11.6), то выполнены необходимые условия оптимальности и управление u^1 для данного $x(0)=a$ локально оптимально. Выбирая различные начальные значения p^1 , можно в принципе получить и оптимальное для этого $x(0)$ управление.

Следовательно, задача определения оптимального управления u (размерности Nr) свелась к последовательному решению N задач (11.10) (размерности r) и к минимизации по $p(1)$ (размерности n) рассогласования

$$\frac{\partial \Phi(x(N))}{\partial x(N)} - p(N)$$

(точнее, некоторой скалярной и монотонной функции от рассогласования). Трудности при таком методе возникают при выборе новых значений $p(1)$, так как градиент функции рассогласования неизвестен в явном виде для большинства задач.

Кроме того, если, например, в линейной задаче $B^T p^1(k+1)=0$ для какого-то $p^1(k+1)$, то из (11.5) соответствующее значение $u^1(k)$ определить невозможно, и необходима комбинация этого метода с прямыми методами.

Заметим, что можно было бы задаться конечными значениями прямой и сопряженной системы $p^1(N)=\partial \Phi(x^1(N))/\partial x(N)$ и, «обернув время» в прямой системе (1.2.3), свести задачу к оптимизации рассогласования между заданным $x(0)=a$ и полученным $x^1(0)$ начальным состоянием прямой системы (1.2.3).

§ 12. Ограничения на переменные состояния. II

В этом параграфе рассмотрим задачу максимизации конечного состояния $J=\Phi(x(N))$ при уравнениях движения

$$x(k+1)=f_1(x(k))+f_2(u(k)) \quad (12.1)$$

и ограничениях

$$\begin{aligned} h_j(x(k)) &\geq 0 & (j=1, \dots, s; k=1, \dots, N), \\ u(k) &\in U & (k=0, 1, \dots, N-1). \end{aligned}$$

Начальное состояние считается фиксированным: $x(0)=a$.

Будем предполагать, что выполнены условия оптимальности § 5.9. Тогда для этой задачи справедлив принцип максимума

$$\max_{u(k) \in U} (p^1(k+1), f_2(u(k))) = (p^1(k+1), f_2(u^1(k))), \quad (12.2)$$

где значения $p^1(k)$ удовлетворяют сопряженной системе

$$p^1(k) = \left[\frac{\partial f_1(x^1(k))}{\partial x(k)} \right]^T p^1(k+1) + \left[\frac{\partial h(x^1(k))}{\partial x(k)} \right]^T \lambda^1(k) \quad (12.3)$$

$$(k = N-1, \dots, 1),$$

$$p^1(N) = \frac{\partial \Phi(x^1(N))}{\partial x(N)} + \left[\frac{\partial h(x^1(N))}{\partial x(N)} \right]^T \lambda^T(N). \quad (12.4)$$

Предполагаем, что матрицы $\partial f_1(x)/\partial x$ неособые при любых x .

Для нахождения управления, удовлетворяющего необходимым условиям оптимальности (12.1)–(12.4), можно применить следующий метод, полученный из результатов §§ 9–11.

1. Выбираем произвольное начальное состояние $p^1(1)$ сопряженной системы (12.3) и произвольную последовательность неотрицательных векторов $\lambda^1(k)$ ($k=1, \dots, N$).

2. Из (12.2) при $k=1$, $p(1)=p^1(1)$, $x(0)=a$ определяем $u^1(0)$.

3. Из (12.1) находим соответствующее $x^1(1)$.

4. Из (12.3) при $k=1$, $x(1)=x^1(1)$, $p(1)=p^1(1)$, $\lambda(1)=\lambda^1(1)$ определяем $p^1(2)$.

Операции 2–4 повторяются, пока из (12.1)–(12.3) не будут получены $x^1(N)$ и $p^1(N)$.

5. Новое значение $p^2(N)$ вычисляется, как и в § 11, из

$$p^2(N) = p^1(N) + \varepsilon \left[\frac{\partial \Phi(x^1(N))}{\partial x(N)} + \left[\frac{\partial h(x^1(N))}{\partial x(N)} \right]^T \lambda^1(N) - p^1(N) \right].$$

6. Новые значения $\lambda^2(k)$ вычисляются, как и в § 9, из

$$\lambda^2(k) = \max \{0, \lambda^1(k) + \varepsilon^1 h(x^1(k))\} \quad (k=1, \dots, N).$$

Процедура повторяется до тех пор, пока не будут достигнуты такие u , x , p , λ , при которых выполняются необходимые условия оптимальности (12.1)–(12.4).

§ 13. Приближение в пространстве управлений

В этом параграфе будут изложены методы, являющиеся аналогом метода п. 1 § 2.16.

Рассмотрим сначала линейную задачу оптимизации конечного состояния, сформулированную в начале § 11.

Выберем произвольное допустимое управление u^1 . Для него при заданном начальном состоянии $x(0) = a$ найдем соответствующую траекторию x^1 и затем, из сопряженной системы (11.2), считая выполненным граничное условие (11.6), — сопряженные переменные p^1 .

Для

$$p^1(N) = \frac{\partial \Phi(x^1(N))}{\partial x(N)}$$

решим задачу

$$\max_{x(N) \in R_N(a)} (p^1(N), x(N)). \quad (13.1)$$

Очевидно, что в силу линейности уравнений движения задача (13.1) эквивалентна задачам

$$\max_{u(k) \in U} (p^1(k+1), Bu(k)) \quad (k = 0, \dots, N-1).$$

Пусть $u^{21}(k)$ — решение этих задач. Тогда новое управление u^2 и соответствующую траекторию x^2 найдем из условия (см. § 2.16)

$$\begin{aligned} u^2(k) &= u^1(k) + \varepsilon [u^{21}(k) - u^1(k)] & (k=0, 1, \dots, N-1), \\ x^2(k) &= x^1(k) + \varepsilon [x^{21}(k) - x^1(k)] & (k=1, \dots, N). \end{aligned}$$

Длину шага находим из условия

$$\max_{0 < \varepsilon < 1} \Phi[x^1(N) + \varepsilon(x^{21}(N) - x^1(N))].$$

Таким образом, этот метод является полным аналогом метода п. 1 § 2.16, и его обоснование, а также оценку приближения можно получить из неравенства

$$\Phi(x^*(N)) - \Phi(x^1(N)) \leq \max_{u(k) \in U} [(p^1(k+1), Bu(k)) - (p^1(k+1), Bu^1(k))].$$

Этот метод можно распространить и на другие типы одноэкстремальных задач.

Формально его можно применять и для любых типов задач, для которых справедлив принцип максимума, однако в этом случае его уже нельзя строго обосновать.

Если нет ограничений на переменные состояния, то этот метод будет состоять из следующих операций:

- 1) выбираем произвольное допустимое управление u^1 ;
- 2) для заданного начального состояния $x(0) = a$ определяем из прямых уравнений (1.2.3) траекторию x^1 ;
- 3) полагаем $p^1(N) = \partial \Phi(x^1(N)) / \partial x(N)$ и из сопряженной системы уравнений (3.1.1) определяем переменные p^1 ;
- 4) составляем функцию Гамильтона и находим новое управление u^{21} из решения задач

$$\max_{u(k) \in U} H(p^1(k+1), x^1(k), u(k)) = H(p^1(k+1), x^1(k), u^{21}(k)). \quad (13.2)$$

Операции 1)–4) повторяются, пока не будет найдено такое управление u^v (v — номер итерации), при котором (13.2) обращается в тождество, т. е. $u^v = u^{v-1}$, и при котором, следовательно, выполнены все необходимые условия оптимальности.

Чтобы не усложнять метод задачей выбора длины шага, здесь положено $\varepsilon = 1$. В общем же случае новое управление следует вычислять из

$$u^2(k) = u^1(k) + \varepsilon [u^{21}(k) - u^1(k)] \quad (k=0, 1, \dots, N-1),$$

где длина шага вычисляется также, как и в методах возможных направлений (§ 3).

Таким образом, этот метод может рассматриваться, с одной стороны, как метод возможных направлений со специальной нормализацией подходящих допустимых направлений $s(k) = u^{21}(k) - u^1(k)$ и, с другой стороны, как метод одновременного решения прямой и двойственной задач, в которых минимизируется рассогласование

$$\max_{u(k) \in U} H(p^1(k+1), x^1(k), u(k)) - H(p^1(k+1), x^1(k), u^1(k)).$$

Пусть теперь на переменные состояния наложены ограничения

$$h_j(x(k)) \geq 0 \quad (j=1, \dots, m; \quad k=1, \dots, N).$$

Тогда рассматриваемый метод будет состоять в следующем:

1) выберем произвольное управление u^1 , $u^1(k) \in U$, и произвольную последовательность неотрицательных векторов

$$\lambda^1, \lambda^1(k) \geq 0 \quad (k=1, \dots, N);$$

2) для заданного начального состояния $x(0)=a$ определим из прямых уравнений (1.2.3) траекторию x^1 ;

3) при $u=u^1$, $x=x^1$ и $\lambda=\lambda^1$ определим последовательность сопряженных переменных p^1 ;

4) составим функцию Гамильтона и найдем управление из решения задач

$$\max_{u(k) \in U} H(p^1(k+1), x^1(k), u(k)) = H(p^1(k+1), x^1(k), u^{21}(k));$$

5) определим новое управление u^2 и новую последовательность λ^2 (управление в двойственной задаче, см. § 5.7) из

$$u^2(k) = u^1(k) + \varepsilon' [u^{21}(k) - u^1(k)] \quad (k=0, 1, \dots, N-1),$$

$$\lambda^2(k) = \max\{0, \lambda^1(k) - \varepsilon' h(x^1(k))\} \quad (k=1, \dots, N).$$

В заключение сделаем одно замечание, позволяющее в некоторых случаях расширить возможности изложенного метода. Допустим, что задача вначале решается одним из методов возможных направлений, изложенных в §§ 2—7 этой главы. Тогда при подходе к оптимуму часто становится ясным, какого рода экстремальное значение принимает функция Гамильтона на оптимальном управлении. Допустим, что это — абсолютный минимум. Так как вблизи оптимума «обычные» методы возможных направлений часто дают уже медленную сходимость, то в рассматриваемом случае удобнее на последующих итерациях использовать методы, рассмотренные в этом параграфе, заменяя операции (13.2) на

$$\min_{u(k) \in U} H(p^1(k+1), x^1(k), u(k)) = H(p^1(k+1), x^1(k), u^{21}(k)). \quad (13.3)$$

Если же функция Гамильтона на оптимальном управлении имеет, например, локальный минимум, то операцию (13.2) в некоторых случаях можно заменить

взятием минимума функции $H(u(k))$ на некоторой окрестности точки $u(k)$.

Изложенный прием, хотя в общем случае и не обоснованный строго, позволяет часто существенно повысить скорость сходимости вблизи оптимального управления.

§ 14. Обсуждение методов

Выше были рассмотрены условия оптимальности для различных типов задач дискретного управления и на основе их построены методы нахождения оптимального управления. Вопрос о применении того или иного метода зависит от специфики задачи и должен решаться в каждом конкретном случае.

Так, если задача имеет относительно простую структуру без сложных ограничений на переменные состояния, то лучше воспользоваться прямыми методами, рассмотренными в §§ 2—7.

Основная черта этих методов, как уже упоминалось, состоит в том, что в них на каждой итерации улучшается допустимое управление. Поэтому здесь управление, которое получается на любой итерации и которое заведомо лучше, чем начальное, может быть использовано в качестве реального управления в оптимизируемой системе.

Для ускорения сходимости вблизи оптимума удобно пользоваться специальными нормализациями направления, например, типа тех, которые были рассмотрены в § 13.

Непосредственное же применение методов, использующих принцип максимума (§§ 12, 13), может оказаться более трудоемким, особенно для задач с большим числом управляющих воздействий (r велико). В этом случае определение глобального максимума функции Гамильтона на каждой итерации может быть связано с достаточно сложной задачей линейного или нелинейного (даже невыпуклого, см. пример § 4.3) программирования. В то же время ясно, что «вдали» от оптимального процесса разумнее не искать абсолютного максимума функции Гамильтона, поскольку значения $p(k+1)$ далеки от оптимальных, а сделать лишь шаг к этому максимуму, что и используется в прямых методах.

Вблизи же оптимума для ускорения сходимости уже лучше воспользоваться специальными нормализациями направления, в частности и той, которая приводит к максимизации функции Гамильтона (§ 13).

При наличии же большого числа сложных ограничений в задаче дискретного управления удобнее применять различного типа двойственные методы (см. §§ 9, 10 этой главы), вводя множители Лагранжа для тех ограничений, для которых трудно построить (или использовать) допустимые вариации в прямых методах.

Отметим, что прямые методы обеспечивают (при соответствующем выборе длины шага) монотонное увеличение показателя качества (если ищется его максимум), приводя практически к одному из локальных максимумов, а не к другим стационарным значениям показателя качества.

В методах, использующих множители Лагранжа (§§ 9, 10), итеративный процесс может, вообще говоря, остановиться на стационарной точке любого типа, а из-за немонотонности процесса полученное приближение может еще существенно не удовлетворять требуемым ограничениям. В то же время различные варианты использования множителей Лагранжа могут быть весьма эффективными, особенно для учета разного рода ограничений на переменные состояния.

Для определения глобального экстремума показателя качества можно проверить полученное решение с помощью достаточных условий оптимальности (§ 5.5), либо выбрать несколько начальных значений тех переменных, по которым осуществляется приближение к оптимальному процессу. Наконец, можно разбить переменные $u(k)$ и $x(k)$ на конечное число значений и для полученной задачи найти оптимальный процесс методами динамического программирования. Полученное решение будет с некоторой точностью определять оптимальный процесс исходной задачи, который можно уже уточнить с любой степенью точности с помощью рассмотренных в этой главе методов.

Выше были рассмотрены методы решения для оптимизации простых (односвязных) дискретных систем, уравнения движения которых имеют вид (1.2.3).

Если задача отличается по своей структуре от рассмотренных, то для ее решения можно применить следующий метод (который при желании может быть полностью обоснован).

1. Составляется функция Лагранжа для рассматриваемой задачи. При этом в эту функцию с соответствующими множителями Лагранжа следует включать лишь те ограничения, которые желательно не учитывать в прямом методе.

Если ограничения заданы в виде неравенств, то соответствующие множители Лагранжа должны быть неотрицательны. Если ограничения заданы в виде равенств, то знак множителей Лагранжа не фиксируется.

2. Функция Лагранжа дифференцируется по своим переменным, в результате чего определяются направления возрастания (убывания) функции Лагранжа по этим переменным (подходящие направления).

3. После этого, определяя допустимые направления изменения переменных функции Лагранжа, можно сформулировать необходимые условия оптимальности. Если ограничений на направления нет, эти условия имеют вид равенств, в противном случае они задаются системой неравенств.

4. Если какой-то группе из полученных условий оптимальности трудно удовлетворить сразу, то по этим переменным осуществляется спуск в подходящем направлении.

§ 15. Системы с запаздыванием

В качестве иллюстрации изложенного в предыдущем параграфе подхода рассмотрим системы с запаздыванием, которые часто приходится рассматривать при управлении экономическими системами, системами с распределенными параметрами и др.

В этом случае процесс описывается уравнением вида

$$x(k+1) = f(x(k-n_1), \dots, x(k-n_v); u(k-m_1), \dots, u(k-m_\mu)), \quad (15.1)$$

где $\{n_1, \dots, n_v\}$, $\{m_1, \dots, m_\mu\}$ — наборы целых чисел,

вектор $x(k) = \{x_1(k), \dots, x_n(k)\}$ по-прежнему описывает состояние процесса, а вектор $u(k) = \{u_1(k), \dots, u_r(k)\}$ — управляющие воздействия на k -м шаге.

В частном случае, когда оба множества $\{n_1, \dots, n_v\}$ и $\{m_1, \dots, m_\mu\}$ состоят только из нулевых элементов, приходим к обычной дискретной системе

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)).$$

Заметим, что последующие рассуждения непосредственно обобщаются на случай, когда функция f и числа v, μ зависят от номера k , поэтому эта зависимость в (15.1) не указывается.

Рассмотрим следующую задачу управления системой (15.1).

Заданы начальные состояния

$$x(-n_i) = a(i) \quad (i=1, \dots, v). \quad (15.2)$$

Предполагается, что векторы $u(k)$ и $x(k)$ могут принимать значения только из заданных множеств

$$u(k) \in U_k, \quad (15.3)$$

$$x(k) \in X_k. \quad (15.4)$$

Процесс управления рассматривается при фиксированном числе шагов: $k=0, 1, \dots, N-1$. Качество управления оценивается суммой

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x(k-n_1), \dots, x(k-n_v); u(k-m_1), \dots, u(k-m_\mu)). \quad (15.5)$$

Требуется найти такое управление $\{u(-m_1), \dots, u(-m_\mu), u(1-m_1), \dots, u(1-m_\mu), \dots, u(N-1-m_1), \dots, u(N-1-m_\mu)\}$ и соответствующую ему в силу уравнений движения (15.1) и начальных условий (15.2) траекторию $\{x(-n_1), \dots, x(-n_v), x(1-n_1), \dots, x(1-n_v), \dots, x(N-n_1), \dots, x(N-n_v)\}$, удовлетворяющие ограничениям (15.3), (15.4), для которых показатель качества (15.5) принимает максимальное значение.

В дальнейшем будем предполагать, что функции $f_i (i=0, 1, \dots, n)$ непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам.

Введем векторы

$$z(k) = \{x(k-n_1), \dots, x(k-n_v)\}, \quad (15.6)$$

$$a = \{a(1), \dots, a(v)\}, \quad (15.7)$$

$$v(k) = \{u(k-m_1), \dots, u(k-m_\mu)\}. \quad (15.8)$$

С учетом этих обозначений уравнение (15.1) и показатель качества (15.5) переписутся в более привычном виде

$$x(k+1) = f(z(k), v(k)), \quad z(0) = a, \quad (15.9)$$

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} f_0(z(k), v(k)). \quad (15.10)$$

Поскольку цель этого параграфа состоит в иллюстрации подхода, изложенного в § 14, а не в детальном исследовании систем с запаздыванием, мы не будем рассматривать общую постановку задачи (15.1)–(15.5), а ограничимся двумя частными случаями.

А) Системы с запаздыванием только по управлению. Пусть $\{n_1, \dots, n_v\} = 0$, т. е. уравнения движения имеют вид

$$x(k+1) = f(x(k); u(k-m_1), \dots, u(k-m_\mu)) \quad (15.11)$$

и показатель качества

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x(k); u(k-m_1), \dots, u(k-m_\mu)). \quad (15.12)$$

В соответствии с изложенным в § 14 методом составим функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} F(x, u, p) = & \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x(k); u(k-m_1), \dots, u(k-m_\mu)) + \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} (p(k+1), f(x(k); u(k-m_1), \dots, u(k-m_\mu)) - \\ & - x(k+1)), \end{aligned} \quad (15.13)$$

которая определена при $x(k) \in X_k$ и $u(k) \in U_k$.

Продифференцируем функцию F по своим аргументам

$$\frac{\partial F}{\partial p(k+1)} = f(x(k), v(k)) - x(k+1), \quad (15.14)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x(k)} = \frac{\partial f_0(x(k), v(k))}{\partial x(k)} + \left[\frac{\partial f(x(k), v(k))}{\partial x(k)} \right]^T p(k+1), \quad (15.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u(k-m_j)} &= \frac{\partial f_0(x(k), u(k-m_1), \dots, u(k-m_\mu))}{\partial u(k-m_j)} + \\ &+ \left[\frac{\partial f(x(k), u(k-m_1), \dots, u(k-m_\mu))}{\partial u(k-m_j)} \right]^T p(k+1) \quad (15.16) \\ &(j=1, \dots, \mu; \quad k=0, 1, \dots, N-1). \end{aligned}$$

Векторы (15.14)—(15.16) определяют направление наискорейшего возрастания функции F по своим аргументам. Пользуясь выражениями (15.14)—(15.16), можно получить различные необходимые условия оптимальности и вытекающие из них вычислительные методы для исследуемой задачи. В частности, если X_k — открытые множества, а U_k ограничены и замкнуты, то из (15.14)—(15.16) получим следующие условия оптимальности (их можно строго доказать, пользуясь методами гл. III).

Пусть u^* — оптимальное управление. Тогда на оптимальном управлении справедливы неравенства

$$\delta_j H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k-m_1), \dots, u^*(k-m_j), \dots, u^*(k-m_\mu)) \leq 0$$

при всех $\delta u^*(k-m_j) \in \bar{K}_{k-m_j}(u^*(k-m_j))$ ($j=1, \dots, \mu$; $k=0, 1, \dots, N-1$). Здесь $\bar{K}_{k-m_j}(u^*(k-m_j))$ — конус допустимых вариаций в точке $u^*(k-m_j) \in U_{k-m_j}$ (см. § 3.2); функция Гамильтона

$$\begin{aligned} H &= f_0(x(k), u(k-m_1), \dots, u(k-m_\mu)) = \\ &= (p(k+1), f(x(k), u(k-m_1), \dots, u(k-m_\mu))) = \\ &= f_0(x(k), v(k)) + (p(k+1), f(x(k), v(k))), \\ \delta_j H &= \left(\frac{\partial H}{\partial u(k-m_j)}, \delta u(k-m_j) \right) \end{aligned}$$

$$(j=1, \dots, \mu; \quad k=0, 1, \dots, N-1);$$

сопряженная система вследствие (15.5) имеет вид

$$p(k) = \frac{\partial f_0(x(k), v(k))}{\partial x(k)} + \left[\frac{\partial f(x(k), v(k))}{\partial x(k)} \right]^T p(k+1) \\ (k=N-1, \dots, 1, 0)$$

с граничным условием

$$p(\hat{N}) = 0.$$

Из этих условий оптимальности непосредственно вытекают вычислительные методы, использующие приближения по допустимым управлениям u и являющиеся аналогом методов, рассмотренных в §§ 6.2—6.7.

Б) Системы с запаздыванием только по состояниям. Пусть теперь $\{m_1, \dots, m_\mu\} = 0$, $\{n_1, \dots, n_\nu\} = \{0, 1, \dots, \nu\}$, т. е. уравнения движения и показатель качества имеют вид

$$x(k+1) = f(x(k), x(k-1), \dots, x(k-\nu); u(k)) \quad (15.17) \\ (k=0, 1, \dots, N-1)$$

с начальными условиями $x(-i) = a(i) \quad (i=0, 1, \dots, \nu)$;

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x(k), x(k-1), \dots, x(k-\nu); u(k)).$$

Определим функцию Лагранжа

$$F(x, u, p) = \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x(k), \dots, x(k-\nu); u(k)) + \\ + \sum_{k=0}^{N-1} (p(k+1), f(x(k), \dots, x(k-\nu); u(k)) - x(k+1)), \quad (15.18)$$

где $x(k) \in X_k$ и $u(k) \in U_k$.

Дифференцируя функцию Лагранжа по своим аргументам, получим

$$\frac{\partial F}{\partial p(k+1)} = f(x(k); u(k)) - x(k+1), \quad (15.19) \\ \frac{\partial F}{\partial x(k)} = \frac{\partial f_0(x(k), \dots, x(k-\nu); u(k))}{\partial x(k)} + \dots + \\ + \frac{\partial f_0(x(k+\nu), \dots, x(k); u(k))}{\partial x(k)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{\partial f(x(k), \dots, x(k-v); u(k))}{\partial x(k)} \right]^T p(k+1) + \dots + \\
& + \left[\frac{\partial f(x(k+v), \dots, x(k), u(k))}{\partial x(k)} \right]^T p(k+v+1) - p(k) \quad (15.20) \\
& (k=1, \dots, N),
\end{aligned}$$

$$p(N+1+v) = p(N+v) = \dots = p(N+1) = 0. \quad (15.21)$$

Как и в первом случае, предполагая, что X_h — открытые множества, из (15.19) — (15.21) получим следующие необходимые условия оптимальности для случая Б).

Пусть u^* — оптимальное управление, $x^* = \{a(-v), \dots, a(1), a(0), x^*(1), \dots, x^*(N)\}$ — соответствующая этому управлению и заданным начальным условиям траектория.

Тогда на оптимальном процессе справедливы неравенства

$$\delta H(p^*(k+1), x^*(k), \dots, x^*(k-v), u^*(k)) \leq 0$$

при всех $\delta u^*(k) \in \bar{K}_h(u^*(k))$ ($k=0, 1, \dots, N-1$).

Здесь $\bar{K}_h(u^*(k))$ — конус допустимых вариаций в точке $u^*(k) \in U_h$, функция Гамильтона

$$\begin{aligned}
H = & f_0(x(k), \dots, x(k-v); u(k)) + \\
& + (p(k+1), f(x(k), \dots, x(k-v); u(k))), \\
\delta H = & \left(\frac{\partial H}{\partial u(k)}, \delta u(k) \right),
\end{aligned}$$

сопряженные переменные $p(k)$ ($k=N+v+1, \dots, 1$) удовлетворяют системе

$$\begin{aligned}
p(k) = & \frac{\partial f_0(x(k), \dots, x(k-v); u(k))}{\partial x(k)} + \dots \\
& \dots + \frac{\partial f_0(x(k+v), \dots, x(k); u(k))}{\partial x(k)} + \\
& + \left[\frac{\partial f(x(k), \dots, x(k-v); u(k))}{\partial x(k)} \right]^T p(k+1) + \dots \\
& \dots + \left[\frac{\partial f(x(k+v), \dots, x(k); u(k))}{\partial x(k)} \right]^T p(k+v+1) \\
& (k=N, \dots, 1)
\end{aligned}$$

с граничными условиями

$$p(N+v+1) = p(N+v) = \dots = p(N+1) = p(N) = 0.$$

§ 16. Особенности оптимизации дискретных систем

Теория оптимального управления дискретными системами развивалась вслед за теорией управления непрерывными системами. Кроме того, сами условия оптимальности для непрерывных систем, сформулированные в виде принципа максимума Л. С. Понтрягина, являются сильным и красивым результатом. Поэтому, естественно, что идеология принципа максимума оказывает сильное влияние и на теорию оптимального дискретного управления. К сожалению, в этом влиянии есть и свои теневые стороны, что приводит к недопониманию специфики дискретных систем, к стремлению полностью перенести методы принципа максимума на дискретные системы.

Возможно, именно по этой причине установление необходимых условий оптимальности для дискретных систем общего вида имеет такую большую историю (см. главу IV и комментарии к ней). В частности (и не в одной работе), утверждалось, что функция Гамильтона должна достигать по крайней мере локального максимума на оптимальном управлении.

Это, если можно так сказать, — тривиальное заблуждение, которое легко опровергается простыми примерами. Более глубокое состоит в том, что условия оптимальности для дискретных систем общего вида (например, типа теорем 3.2.1) считаются более «слабыми» в вычислительном отношении, чем принцип максимума Л. С. Понтрягина, поскольку «выделяют», во всяком случае, все стационарные точки и точки локального максимума функции Гамильтона. Отсюда делается вывод, что необходимо искать более эффективные условия оптимальности и вычислительные методы, основанные на более тонких свойствах функции Гамильтона (или ее аналогов), чем те, которые получены на основе линейной аппроксимации оптимального процесса и рассмотрены в этой книге.

На самом деле, такое недоверие к методам первого порядка для решения задач дискретного управления является во многом заблуждением, и эти методы здесь не менее эффективны, чем, например, в «обычных» одно-

шаговых задачах нелинейного программирования (см. гл. II).

Проиллюстрируем эти рассуждения на нескольких простых примерах.

Допустим, что функция Гамильтона, построенная для некоторого управления $u(k) = \bar{u}(k)$, имеет вид, показанный на рис. 6.16.1 ($a \leq u(k) \leq b$). Тогда из теоремы 3.2.1

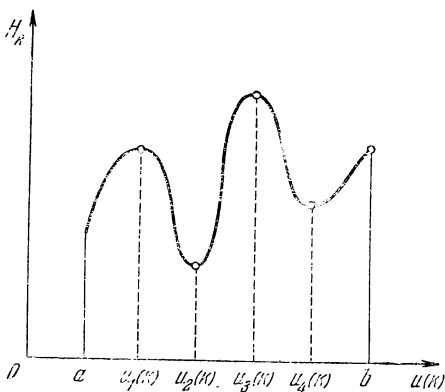


Рис. 6.16.1.

следует, что точками, «подозрительными на оптимальность», могут быть точки $u_1(k)$, $u_2(k)$, $u_3(k)$, $u_4(k)$ и $u_5(k) = b$, в то время как принцип максимума выделил бы только одну точку $u_3(k)$. Таким образом, если бы принцип максимума в данном случае был верен, то определяя на каждой итерации управление $u^*(k)$, (в данном случае $u^*(k) = u_3(k)$), при котором функция Гамильтона достигает своего наибольшего значения, и используя методы § 13, можно в принципе уменьшать рассогласование $|\bar{u} - u^*|$ до тех пор, пока не будет получено управление $\bar{u} = u^*$, удовлетворяющее уже необходимым условиям оптимальности.

Отметим здесь, что определение на каждой итерации максимума функции Гамильтона при большой размерности вектора u и сложном виде самой функции Гамильтона может быть весьма трудоемкой операцией. Если же принцип максимума не справедлив, то эти

методы, естественно, использовать уже нельзя, так как в общем случае неясно, между какими точками $u_i(k)$ ($i=1, \dots, 5$) и $u(k)$ следует уменьшать рассогласование. С другой стороны, если функция Гамильтона на каждом шаге имеет m стационарных значений, то, казалось бы, показатель качества J , как функция $\{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\}$, должен иметь уже m^N стационарных значений.

Это, конечно, не так. Действительно, пусть функция Гамильтона на k -м шаге, посчитанная для управления $u = \bar{u}$, $\bar{u}(k) = u_1(k)$, имеет вид, показанный на рис. 6.16.1.

Пусть $\{\bar{x}(k), \bar{p}(k)\}$ — соответствующие значения переменных состояния и сопряженных переменных. При $u(k) = \bar{u}(k)$ имеем

$$\frac{\partial H(\bar{p}(k+1), \bar{x}(k), \bar{u}(k))}{\partial u(k)} = 0,$$

следовательно, значение $\bar{u}(k) = u_1(k)$ определяет стационарную точку (по $u(k)$), при фиксированных остальных значениях $\bar{u}(j)$, $j \neq k$ показателя качества, т. е.

$$\frac{\partial J(\bar{u}(0), \dots, \bar{u}(k), \dots, \bar{u}(N-1))}{\partial u(k)} = 0.$$

Точки же $u(k) = u_1(k)$, $u(k) = u_2(k)$, $u(k) = u_3(k)$, при которых также

$$\frac{\partial H(\bar{p}(k+1), \bar{x}(k), u_i(k))}{\partial u(k)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

вообще не несут никакой информации о поведении $J(u(0), \dots, u(N-1))$.

Рассмотрим простой пример. Пусть

$$\begin{aligned} x_1(1) &= f_1(x_1(0), x_2(0)) + g_1(u(0)), \\ x_2(1) &= f_2(x_1(0), x_2(0)) + g_2(u(0)), \\ f_1(x_1(0), x_2(0)) &= f_2(x_1(0), x_2(0)) = 0, \end{aligned}$$

и требуется найти максимальное значение

$$J = x_1^2(1) + x_2^2(1) = g_1^2(u(0)) + g_2^2(u(0)). \quad (16.1)$$

Очевидно, функция Гамильтона в этом случае имеет вид

$$H(p_1(1), p_2(1), u(0)) = p_1(1)g_1(u(0)) + p_2(1)g_2(u(0)), \quad (16.2)$$

где

$$\begin{aligned} p_1(1) &= 2x_1(1) = 2g_1(u(0)), \\ p_2(1) &= 2x_2(1) = 2g_2(u(0)). \end{aligned} \quad (16.3)$$

Из (16.1), (16.2) получим, что

$$\frac{\partial J}{\partial u(0)} = 2g_1(u(0)) \frac{\partial g_1(u(0))}{\partial u(0)} + 2g_2(u(0)) \frac{\partial g_2(u(0))}{\partial u(0)}, \quad (16.4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u(0)} = 2p_1(1) \frac{\partial g_1(u(0))}{\partial u(0)} + 2p_2(1) \frac{\partial g_2(u(0))}{\partial u(0)}. \quad (16.5)$$

Если зафиксировать некоторое $u(0) = \bar{u}(0)$, то производную показателя качества, как это и следует из теории, можно вычислить как по формуле (16.4), так и по (16.5), т. е.

$$\frac{\partial J(\bar{u}(0))}{\partial u(0)} = \frac{\partial H(\bar{p}_1(1), \bar{p}_2(1), \bar{u}(0))}{\partial u(0)}, \quad (16.6)$$

где $\bar{p}_1(1), \bar{p}_2(1)$ вычисляются из (16.3) при этом $\bar{u}(0)$. Но если теперь рассматривать $H(\bar{p}_1(1), \bar{p}_2(1), u(0))$ как функцию $u(0)$ при фиксированных $\bar{p}_1(1), \bar{p}_2(1)$, то ее поведение, очевидно, будет отличаться от поведения $J(u(0))$. Таким образом, функция Гамильтона отражает только *локальные* свойства показателя качества, выражающиеся в равенстве (16.6), и, естественно, рассмотрение глобального поведения функции $H(p, x, u)$ при фиксированных p и x несет мало информации о зависимости показателя качества J от u .

В частности, показатель качества может быть одноэкстремальной функцией управления u , в то время как функция Гамильтона может иметь несколько экстремумов. Действительно, пусть в этом примере

$$g_1(u(0)) = 3u^3(0) - 1, \quad g_2(u(0)) = 3u^2(0) + 3.$$

Тогда

$$J(u(0)) = (3u^3(0) - 1)^2 + 9(u^2(0) + 1)^2.$$

Поведение функции $J(u(0))$ показано на рис. 6.16.2.

Нетрудно показать, что $\partial J(u(0))/\partial u(0)$ обращается в нуль в единственной точке $u^*(0)=0$, которая определяет глобальный минимум показателя качества (см. рис. 6.16.2).

В то же время $p_1^*(1)=-2$, $p_2^*(1)=6$ и функция Гамильтона на оптимальном процессе имеет вид (рис. 6.16.3)

$$H(p_1^*(1), p_2^*(1), u(0)) = -2(3u^3(0) - 1) + 18(u^2(0) + 1) = \\ = -6u^3(0) + 18u^2(0) + 20,$$

т. е. имеет два экстремума в точках $u^*(0)=0$ и $u^*(0)=2$ (при этом в оптимальной точке $u^*(0)=0$ функция Гамильтона имеет локальный минимум).

Этими же свойствами функции Гамильтона объясняется и следующее явление. Рассмотрим пример § 4.1. В этом примере оптимальное управление $u^*(0)=-2$ доставляет функции Гамильтона минимальное значение (рис. 6.16.4, а).

Тогда если взять любую точку $\bar{u}(0)$ из окрестности $u^*(0)=-2$, то так как производная функции $H(p^*(1), x(0), u(0))$ направлена в сторону ее возрастания, т. е. от точки минимума $u^*(0)=-2$, то мы, казалось бы, никогда не придем к этой точке, если будем двигаться по градиенту (в данном случае по производной $\partial H/\partial u(0)$) функции Гамильтона. На самом деле это не так, и с изменением значений $u(0)$ меняется и сама функция Гамильтона.

Проследим этот процесс движения $u(0)$ к $u^*(0)$ на примере, рассмотренном в § 4.1. Итак, пусть

$$x_1(k+1) = x_1(k) + 2u(k) \quad (k=0, 1), \quad (16.7)$$

$$x_2(k+1) = -x_1^2(k) + x_2(k) + u^2(k) \quad (k=0, 1). \quad (16.8)$$

Требуется найти максимальное значение $J(x(2))=x_2(2)$.

Сопряженная система для уравнений (16.7), (16.8) имеет вид

$$p_1(k) = p_1(k+1) - 2x_1(k)p_2(k+1) \quad (k=1), \quad (16.9)$$

$$p_2(k) = p_2(k+1) \quad (k=1), \quad (16.10)$$

где $p_1(2)=0$, $p_2(2)=p_1(1)=1$.

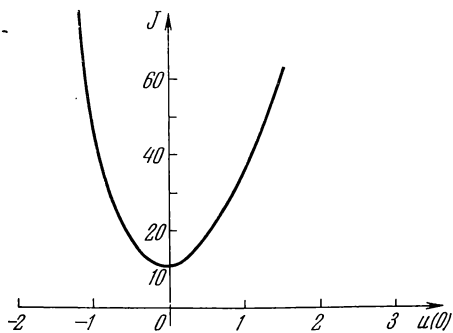


Рис. 6.16.2.

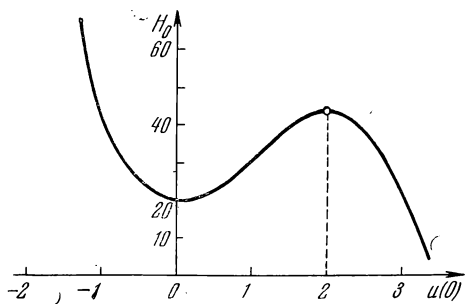


Рис. 6.16.3.

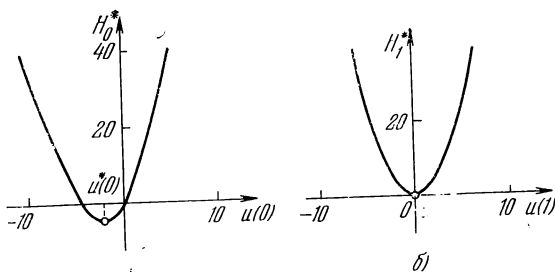


Рис. 6.16.4.

Функция Гамильтона

$$H(u(0)) = 2p_1(1)u(0) + u^2(0), \quad H(u(1)) = u^2(1). \quad (16.11)$$

Оптимальное управление для этой задачи

$$u^*(0) = -2, \quad u^*(1) = \pm 5, \quad p^*(1) = 2, \quad J^* = 19,0000.$$

Поведение «оптимальных» функций Гамильтона при $k=0, 1$ показано на рис. 6.16.4, а, б. На рис. 6.16.5

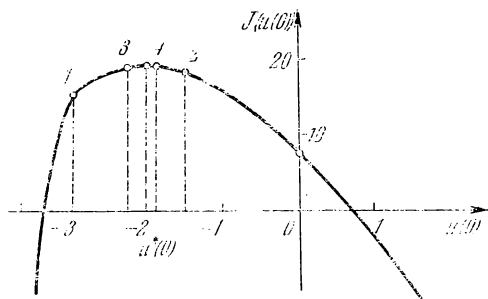


Рис. 6.16.5.

показана зависимость показателя качества J от $u(0)$ при $u^*(1) = \pm 5$:

$$J = -3u^2(0) - 12u(0) + u^3(1) - 18 = -3u^2(0) - 12u(0) + 7.$$

Выберем теперь некоторые начальные значения $u^{(0)}(0)$, $u^{(0)}(1)$ и сделаем несколько итераций методом возможных направлений (см. § 6.3).

1-я итерация. Пусть $u^{(0)}(0) = 0$, $u^{(0)}(1) = 5$, $J^{(0)} = 7,0000$. Тогда из (16.7) — (16.12) получим, что $x_1^{(0)}(1) = 3$, $x_2^{(0)}(1) = -9$, $x_1^{(0)}(2) = 13$, $x_2^{(0)}(2) = 7$, $p_1^{(0)}(1) = -6$ и

$$H^{(0)}(0) = H(u^{(0)}(0)) = [u^{(0)}(0)]^2 - 12u^{(0)}(0),$$

$$H^{(0)}(1) = H(u^{(0)}(1)) = [u^{(0)}(1)]^2.$$

График функции Гамильтона при $k=0$ приведен на рис. 6.16.6.

Вычислим $\partial H^{(0)}(0)/\partial u(0)$, $\partial H^{(0)}(1)/\partial u(1)$ при управлении $u^{(0)}$:

$$\frac{\partial H^{(0)}(0)}{\partial u(0)} = -12, \quad \frac{\partial H^{(0)}(1)}{\partial u(1)} = 10.$$

Выберем длину шага $\lambda=0,25$. Определим новое управление $u^{(1)}$ из

$$u^{(1)}(0) = u^{(0)}(0) + \lambda \frac{\partial H^{(0)}(0)}{\partial u(0)} = 0 + 0,25(-12) = -3,$$

$$u^{(1)}(1) = u^{(0)}(1) + \lambda q^{(0)}(1) = 5 + 0,25 \cdot 0 = 5.$$

Здесь направление изменения $u^{(0)}(1) -$ число $q^{(0)}(1) = 0$,

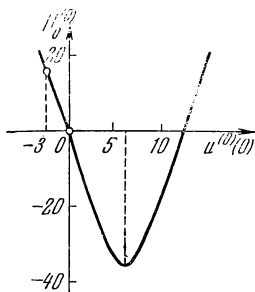


Рис. 6.16.6.

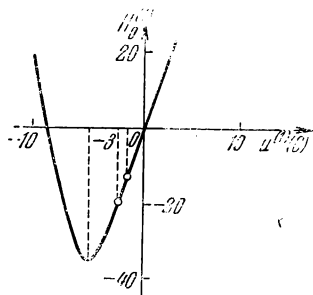


Рис. 6.16.7.

так как $u^{(0)}(1)$ находится на ограничении, а $\partial H^{(0)}(1)/\partial u(1) > 0$.

2-я итерация. $u^{(1)}(0) = -3$, $u^{(1)}(1) = 5$, $J^{(1)} = 16,0000$. Этому управлению соответствует функция Гамильтона

$$H^{(1)}(0) = H(u^{(1)}(0)) = [u^{(1)}(0)]^2 + 12u^{(1)}(0),$$

график которой показан на рис. 6.16.7.

При этом управлении $u^{(1)}$:

$$\partial H^{(1)}(0)/\partial u(0) = 6.$$

Поэтому новое управление $u^{(2)}(0)$ определится из (опять $\lambda=0,25$) $u^{(2)}(0) = -3 + 0,25 \cdot 6 = -1,5$. Управление $u(1)$ по-прежнему не меняется: $u^{(2)}(1) = u^{(1)}(1) = 5$.

3-я итерация. $u^{(2)}(0) = -1,5$, $u^{(2)}(1) = 5$, $J^{(2)} = 18,2500$. Функция Гамильтона при управлении $u^{(2)}$:

$$H^{(2)}(0) = H(u^{(2)}(0)) = [u^{(2)}(0)]^2.$$

График ее показан на рис. 6.16.8.

Значение производной $\partial H^{(2)}(0)/\partial u(0) = -3$, и новое приближение равно

$$u^{(3)}(0) = -1,5 + 0,25(-3) = -2,25, \quad u^{(3)}(1) = 5.$$

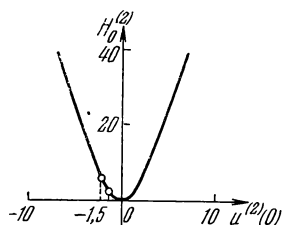


Рис. 6.16.8.

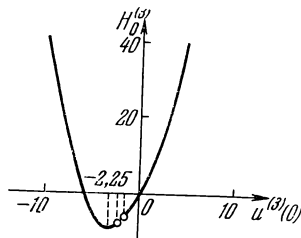


Рис. 6.16.9.

4-я итерация. $u^{(3)}(0) = -2,25, u^{(3)}(1) = 5, J^{(3)} = 18,9825$.

$$H(u^{(3)}(0)) = [u^{(3)}(0)]^2 + 6u^{(3)}(0), \quad \partial H^{(3)}(0)/\partial u(0) = 1,5, .$$

$$u^{(4)}(0) = -2,25 + 0,25 \cdot 1,5 = -1,88, \quad u^{(4)}(1) = 5, \quad J^{(4)} = 18,9568.$$

График функции $H(u^{(3)}(0))$ показан на рис. 6.16.9. Движение $u^{(i)}(0)$ ($i=0, 1, 2, 3, 4$) к оптимальному значению $u^*(0)$ показано на рис. 6.16.5.

КОММЕНТАРИИ

Предисловие

Большое число практических задач многошаговой оптимизации имеется в монографиях: Р. Беллман [1, 2], Р. Беллман, С. Дрейфус [1], Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс [1], А. Кофман, Р. Крюйон [1], Г. Ховард [1], Р. Арис [1], Робертс [1], Л.-Т. Фан, Ч.-С. Вань [4]. В перечисленной литературе за исключением последней книги, рассматривались методы динамического программирования.

О численных методах динамического программирования см. работы Н. Н. Моисеева [1] и Р. Ларсона [1].

Теории и методам оптимального управления посвящены монографии Л. С. Понтрягина, В. Г. Болтянского, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко [1], В. Г. Болтянского [1], Е. Ли и Л. Маркуса [1], Д. Лейтмана [1], М. Атанаси и П. Фальба [1].

О методах линейного и нелинейного программирования см. Дж. Данциг [4], Д. Б. Юдин и Е. Г. Гольштейн [1], С. Карлин [1], Дж. Хедли [1], Г. Кюнц и В. Крелле [1].

Глава I

§ 1. 1. Анализ и оптимизация динамических моделей — в настоящее время одна из центральных проблем математической экономики. Динамические модели экономики исследовались во многих работах, см. например, Л. В. Канторович, В. Л. Макаров [1], В. Л. Макаров [1], Н. Ф. Шатилов [1], Ю. П. Иванилов, А. А. Петров [1], Ю. П. Иванилов [1], В. З. Белянский [1], Ю. Н. Гаврилец, Б. Н. Михайлевский, Ю. Р. Лейбкунд [1] и книги: Л. В. Канторович [1], Р. Аллен [1], А. Бергстром [1].

Помимо построения самих динамических моделей, важной задачей является создание эффективных методов их расчета. В большинстве работ оптимизация динамической модели рассматривается как некоторая многошаговая задача линейного программирования, для решения которой в явном или неявном виде используется принцип декомпозиции задачи (Л. В. Канторович [2], Л. В. Канторович, В. Л. Макаров [1], В. Л. Макаров [1], Дж. Данциг [1, 2, 4], В. А. Волконский [2, 3], Р. Аллен [1]).

Аппарат «дискретного принципа максимума» использовался в работах Ю. П. Иванилова, А. А. Петрова [1, 2], В. М. Ефимова [1, 2], Ч. Хуанга и Л.-Т. Фана [1, 2].

2. Вопросам оптимального управления созданием запасов посвящена обширная литература. Здесь отметим только работы А. Вейнотта [1] и Ф. Хэнсмана [1], которые наиболее близки к принятому в книге подходу.

3. Для оптимизации многоступенчатых химико-технологических схем, состоящих из связанных друг с другом аппаратов, применялось как динамическое программирование (Р. Арис [1], С. Робертс [1], И. И. Иоффе, Л. М. Письмен [1]), так и «дискретный принцип максимума» (Л.-Т. Фан, Ч.-С. Вапс [1], Г. М. Островский [1, 2], Г. М. Островский, Ю. М. Волин [1], Т. А. Бережинский, Ю. М. Волин, Г. М. Островский [1]).

4. Сведение статических задач оптимизации к динамическим предлагалось Р. Беллманом [2] и затем было развито в работе Н. Н. Моисеева [2].

§§ 2, 3. Общая постановка задачи дискретного управления и классификации задач по форме аналогична непрерывному случаю (Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко [1], В. Г. Болтянский [1], Л. И. Розоноэр [1]).

Конечно-разностная аппроксимация задач оптимального непрерывного управления рассматривалась в работах Ю. М. Ермольева, В. П. Гуленко [1, 2].

§ 4. Линейные дискретные системы управления явились предметом особого изучения.

О задачах динамического линейного программирования уже упоминалось (см. комментарии к § 1).

Дискретный вариант задачи о быстродействии рассматривался в работах Н. Н. Красовского [1], Б. Н. Пшеничного [4], А. И. Мороза [1], Ч. Дезоэра и Д. Уинга [1—3].

Линейные дискретные системы с квадратичным показателем качества изучались в работах Р. Калмана [1], Т. Ганкеля и Д. Франклина [1], П. В. Надеждина [1].

Применению методов линейного и нелинейного программирования (начиная с использования классического метода множителей Лагранжа) для расчета дискретных систем автоматического управления посвящены работы: Я. З. Цыпкин [1, 2], Л. Заде, Б. Уален [1], Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин [1], А. И. Пропой [1], Л. С. Гноенский, С. М. Мовшович [1, 2], Г. Торнг [1], К. Фигли [1], Д. Порселли. К. Фигли [1], М. Ким [1], А. И. Березовский, В. В. Иванов [1].

Глава II

§ 1. Достаточно подробные сведения по теории выпуклых множеств и n -мерной геометрии имеются, например, в приложениях к книгам Д. Б. Юдина и Е. Г. Гольштейна [1] и С. Карлина [1]. Для более детального изучения см., например, монографию Р. Рокафеллара [3].

§ 2. О теории и методах нелинейного программирования см. Дж. Хедли [1], Г. Кюнц и В. Крелле [1], С. И. Зуховицкий и Л. И. Авдеева [1], Дж. Деннис [1], Г. Зойтендейк [1], С. Карлин [1].

§ 3—6. Строгому рассмотрению условий оптимальности для различных типов экстремальных задач посвящена книга Б. Н. Пшеничного [5] этой же серии. См. также А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин [1], В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов [2, 3], Л. Нейштадт [2], Б. Н. Пшеничный [3], М. Кэнон, Ч. Каллэм, Е. Полак [1].

§ 7—9. Двойственный подход для решения оптимальных задач, изложенный в начале § 7, рассмотрен в работе Л. В. Канторовича [1].

Для понимания основ теории двойственности достаточно работ Е. Г. Гольштейна [1] («аналитический» подход) и С. Карлина [1], глава 7 («геометрический» подход).

Сама идея двойственности в экстремальных задачах высказывалась задолго до возникновения математического программирования, см. Р. Курант [1]. Она тесно связана с преобразованием Лежандра в вариационном исчислении (см. И. М. Гельфанд, С. В. Фомин [1] и Р. Даффин [1]). Однако только благодаря развитию теории математического программирования двойственность начинает играть центральную роль при исследовании экстремальных задач.

Понятие двойственности в линейном программировании было введено Дж. Нейманом в 1947 г.; им же была высказана идея о связи матричной игры с парой двойственных задач линейного программирования. Развитию этих идей посвящена работа А. Голдмана и А. Таккера [1]. См. также Д. Гейл [1], Дж. Данциг [1], Д. Б. Юдин и Е. Г. Гольштейн [1]. В них имеются и различные интерпретации двойственной задачи.

О двойственности в квадратичном программировании см. У. Дорн [1], Р. Коттл [1]. О связи теории квадратичного программирования с классической механикой см. Ж. Моро [1].

О двойственности в нелинейном программировании см. С. Карлин [1], Ф. Вулф [1], М. Хансон [1], Дж. Данциг, Е. Айнзенберг, Р. Коттл [1], Р. Коттл [2], О. Мангасарьян [1], Р. Рокафеллар [1, 2], Е. Г. Гольштейн [1, 3], Г. Ш. Рубинштейн [1].

Симметричные двойственные задачи рассматривались в работах: Б. Монд [1], Б. Монд и Р. Коттл [1], С. Мендиратта [1].

О связи двойственности с теоремой о минимаксе в бесконечных играх см. И. Штоер [1, 2], О. Мангасарьян, Дж. Понштейн [1].

Обобщение теорем двойственности на случай квазивыпуклых функций дано в работах К. Эрроу и А. Антховена [1], К. Кортанека и Дж. Эванса [1], С. Карамардяна [1].

Работы Б. Н. Пшеничного [1, 2] посвящены применению принципа двойственности для построения методов решения экстремальных задач.

В работе А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова [1] дано современное и строгое изложение теории двойственности.

§ 10. Обычно теорема Куна — Таккера доказывается с помощью леммы Минковского — Фаркаша (Г. Кун и А. Таккер [1], М. Кэнон, Ч. Каллэм, Е. Полак [1]) и при несколько иных условиях регулярности.

Приведенное здесь доказательство с помощью теорем двойственности линейного программирования (которые сами основаны на лемме Минковского — Фаркаша) дано Т. Саати [1].

§ 11. Об аналогичной классификации методов в линейном программировании см. Д. Б. Юдин и Е. Г. Гольштейн [1]. Обзоры методов нелинейного программирования см. Ю. М. Ермолев [1], Г. Зойтендейк [2], Б. Т. Поляк [1, 2], Е. С. Левитин, Б. Т. Поляк [1].

§ 12. Вывод оценки для приближения см. Г. Зойтендейк [1] и С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева [1]. Говоря об оценках решения, нельзя не сказать о методах штрафных функций, которые получили в настоящее время большое распространение для быстрого получения первых приближений. См. Н. Н. Моисеев [4] и § 6.8.

§ 13. Методы возможных направлений были предложены Г. Зойтендейком [1]. О различных реализациях этого метода см. С. И. Зуховицкий и Л. И. Авдеева [1], Дж. Розен [2].

§ 14. Градиентные методы при ограничениях в виде равенств рассматривались в работах Дж. Денниса [1] и Г. Келли [1], а условия оптимальности в главе 3 книги К. Эрроу, Л. Гурвица, Х. Удзавы [1].

§ 15. Двойственный метод, рассмотренный в начале параграфа, применялся в таком прямом виде, в основном, при оптимизации динамических задач, где он сводится к решению двухточечной краевой задачи (см. § 6.13). О применении его в квадратичном программировании см. Г. Кюнц и В. Крелле [1].

Метод обобщенного градиента предложен Н. З. Шором [1]. О скорости сходимости этого метода и его применениях см. Н. З. Шор [2, 3], Н. З. Шор, М. Б. Щепакин [1]. Он тесно связан с адаптивными методами (Я. З. Цыпкин [3]). О минимизации негладких функционалов см. также А. Ю. Левин [1], Б. Т. Поляк [2]. Двойственные градиентные методы рассматривались в работах Х. Удзавы (см. сборник К. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава [1]), Б. Н. Пшеничного [1, 2], Н. З. Шора [2].

О методах декомпозиции для задач линейного и нелинейного программирования см. Дж. Данциг [4], Е. Г. Гольштейн [2], Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин [1], Н. З. Шор [2].

§ 16. 1. Изложенный здесь метод рассматривался в работах М. Франка и Ф. Вулфа [1], Ф. Вулфа [1], В. Ф. Демьянова и А. М. Рубинова [1, 3].

2. Этот метод был предложен К. Эрроу и Л. Гурвицем [1]. Методам нахождения седловых точек посвящены работы В. Ф. Демьянова [1], В. Ф. Демьянова и А. М. Рубинова [3], В. А. Волконского [1], А. Бутца [1].

Глава III

§§ 1—5. Условия оптимальности в виде, аналогичном теоремам §§ 2, 5, рассматривались в работах Б. Иордана и Е. Поляка [1], А. И. Пропоя [2], М. Кэнона, Ч. Каллэма, Е. Поляка [1, 2], Р. Габасова [2].

При этом, как видно из доказательства теоремы 2.1 § 2, схема получения условий оптимальности весьма проста и состоит в следующем.

Исходную задачу дискретного управления (например, задачу 1 § 1.3) можно рассматривать как задачу статической максимизации функции $J(u(0), \dots, u(N-1))$ rN переменных $u_j(k)$ ($j=1, \dots, r$; $k=0, 1, \dots, N-1$), заданной на прямом произведении N множеств U .

Условия оптимальности для такой задачи, как показано в главе II, будут

$$\delta j^*(u^*(0), \dots, u^*(N-1)) \leq 0 \text{ для всех } \delta u^*(k) \in \bar{K}(u^*(k)) \quad (1) \\ (k=0, 1, \dots, N-1),$$

где $K(u^*(k))$ — некоторым образом определенный конус допустимых по множеству U вариаций в точке $u^*(k)$.

Но вследствие (3.24)

$$\delta J^* = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)). \quad (2)$$

Поэтому, выбирая специальную вариацию $\delta u^*(j) = 0$, $\delta u^*(k) \neq 0$ из (1), (2), получим, что на оптимальном управлении

$$\delta_u H(p^*(k+1), x^*(k), u^*(k)) \leq 0 \text{ для всех } \delta u^*(k) \in \bar{K}(u^*(k)).$$

Отсюда видно, что, по существу, любые «прямые» условия оптимальности для статических задач оптимизации (см. § 2.4), различающиеся способами определения допустимых конусов и условиями регулярности и детально исследованные в работах А. Я. Дубовицкого, А. А. Милютина [1], Л. Нейштадта [2], Г. Халкина и Л. Нейштадта [1], Б. Н. Пшеничного [3, 5], В. Ф. Демьянова, А. М. Рубинова [1—3], М. Кэнона, Ч. Каллэма, Е. Полака [1, 2], Г. Зойтендейка [1] и др., автоматически трансформируются по этой схеме в соответствующие условия оптимальности для задач дискретного управления.

Такая схема получения условий оптимальности для дискретных систем была использована в работе А. И. Пропоя [4]. Более общая схема использовалась в работах М. Кэнона, Ч. Каллэма, Е. Полака [1, 2], где уравнения движения трактовались так же, как ограничения на переменные (см. также главу V), и где детальным образом были исследованы различные определения конусов допустимых вариаций и следующих из них условий оптимальности для одношаговых и многошаговых задач оптимизации.

Этот подход, помимо установления общности теории математического программирования и теории оптимального дискретного управления, позволяет переносить и вычислительные методы математического программирования на задачи дискретного управления (см. §§ 6.1—6.7).

Глава IV

§§ 1—3. «Дискретный» принцип максимума имеет довольно своеобразную историю.

В 1959 г. Л. И. Розоноэр [1] пришел к выводу, что для дискретных процессов принцип максимума, вообще говоря, не имеет места. Им были рассмотрены линейные дискретные системы с линейным показателем качества и для них установлены необходимые и достаточные условия оптимальности. Затем Ш. С. Л. Чанг [1—3] нестрого показал, что на оптимальном управлении дифференциал функции Гамильтона неположителен. С. Кац [1, 2] ошибочно утверждал, что и для дискретных процессов произвольного вида справедлив принцип максимума. Эту же ошибку повторили Л.-Т. Фан и Ч.-С. Вань в своих многочисленных работах по оптимизации многошаговых процессов (см., например, Фан, Вань [1, 2, 3]).

Недостаточность, а часто и ошибочность результатов заставили вернуться к этому вопросу. А. Г. Бутковский [1, 2] построил пример, показывающий, что на оптимальном управлении функция Гамильтона

может иметь локальный максимум; однако полученные им необходимые условия оптимальности были неточными.

Аналогичные примеры (см. § 1) рассматривались также в работах Б. Иордана и Е. Полака [1], Дж. Пирсона [1] и в особенности Р. Габасова [2].

Ф. Хорн и Р. Джексон [1] в своей работе показали неправомочность пренебрежения членами второго порядка малости. Ошибочности перенесения любых методов «непрерывного» принципа максимума на дискретные процессы посвящены и работы А. Чарнса и К. Кортанека [1], Б. Иордана, Е. Полака [1].

Необходимые условия оптимальности в форме, аналогичной теореме 3.2.1 (при различных допущениях на условия задачи и построениях конусов допустимых вариаций), были доказаны в работах Б. Иордана и Е. Полака [1], А. И. Пропося [2], М. Кэнона, Ч. Каллэма и Е. Полака [1], Р. Габасова [2].

Однако при этом высказывалось сомнение относительно ценности этих условий по сравнению с принципом максимума (см., например, Р. Габасов и Ф. М. Кириллова [1]). Это не так, как видно из § 6.14 и из вычислительных методов, построенных на основе этих условий оптимальности и рассмотренных в § 6.2—6.7. В то же время построение вычислительных процедур типа рассмотренных в § 6.11 для дискретных систем общего вида часто может быть затруднительным.

Достаточные условия, при которых для дискретных систем справедлив принцип максимума (теоремы 2.1, 3.1), установлены А. И. Пропося [2]. Этот же результат для задачи оптимизации конечного состояния (теорема 2.1) был получен Г. Халкиным [1]. Для задачи с суммарным показателем качества в этой работе требовалась выпуклость множеств достижимости $\tilde{R}_1(\tilde{x})$, что не выполняется даже для линейных систем с выпуклым показателем качества (см. замечания в § 3). Впоследствии Д. Хольцман [1, 2] (см. также Д. Хольцман и Г. Халкин [1]) усилил этот результат с помощью введения выпуклости по направлению множества достижимости (см. § 3).

Детальное исследование достаточных условий, при которых для дискретных систем справедлив принцип максимума, было проведено Р. Габасовым [2].

§ 4. Принцип квазимаксимума был выдвинут Р. Габасовым и Ф. М. Кирилловой [1]. Он позволяет связать условия оптимальности для дискретных и непрерывных процессов. Кратко остановимся на этой связи.

Рассмотрим задачу нахождения такого кусочно-непрерывного управления $u(t)$ на отрезке $[0, T]$, которое доставляет показателю качества $J = \Phi(x(T))$ максимальное значение в силу уравнений движения

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)), \quad (1)$$

где $u(t) \in U$. Будем предполагать, что функции $\Phi(x)$, $f(x, u)$ и множество U удовлетворяют тем же ограничениям, что и для соответствующей дискретной задачи 1 (см. гл. III). Будем предполагать также, что оптимальное управление u^* в рассматриваемой задаче существует. Разобьем интервал управления на N шагов и положим

$\Delta = T/N$; пусть $u(t) = u(\Delta k) = \text{const}$ на полуинтервале $\Delta k \leq t < \Delta(k+1)$ ($k=0, \dots, N-1$). Тогда уравнения движения с точностью до бесконечно малых второго порядка заменяется на разностное вида (см. § 1.2)

$$x[\Delta(k+1)] = x(\Delta k) + \Delta f[x(\Delta k), u(\Delta k)] \quad (k=0, \dots, N-1). \quad (2)$$

Для такой дискретной системы на основании теоремы 4.1 можно утверждать, что на оптимальном управлении

$$H[p^*(\Delta k + \Delta), x^*(\Delta k), u^*(\Delta k)] \geq H[p^*(\Delta k + \Delta), x^*(\Delta k), u] - \delta \quad (3)$$

для всех $u \in U_k(\Delta, \delta)$ где множество $U_k(\Delta, \delta)$ определено из (4.4.16) и зависит от Δ . Очевидно, при $\Delta=0$, $\delta=0$ неравенство (3) переходит в «обычный» принцип максимума. Если же теперь увеличивать Δ , то, например, может быть, когда $\delta(\Delta)$ тоже будет расти, а $U(\delta, \Delta) \equiv U$. В этом случае из теоремы 4.1 следует, что точками, подозрительными на оптимальность, могут быть уже не только точки абсолютного максимума функции Гамильтона (см. рис. 4.1). В то же время можно построить задачи дискретного управления (например, типа рассмотренной в § 1 этой главы), для которых принцип максимума не справедлив ни при каких $\Delta, \Delta > 0$.

Заметим, что в этом примере оптимальное управление в соответствующем непрерывном аналоге достигается только на скользящих (Р. В. Гамкрелидзе [1]) режимах, т. е. не существует в точном смысле этого слова.

Вообще, между условиями существования оптимального управления в непрерывных процессах и условиями выполнения принципа максимума в дискретных процессах существует интересная связь.

Прежде всего заметим, что вопрос о существовании оптимального управления в непрерывных процессах уже не является таким тривиальным, как в дискретных процессах (см. § 1.6), и уже не обеспечивается только требованиями непрерывности (это связано с тем, что при таких условиях множества достижимости в непрерывной задаче могут быть не замкнутыми).

Но если, например, потребовать, чтобы в уравнениях (1) множество $f(x, U)$ было выпуклым при любых x , то можно показать (при некоторых дополнительных предположениях), что оптимальное управление в непрерывной задаче существует для любого начального состояния (А. Ф. Филиппов [1], Е. Роксин [1]). Или оптимальное управление всегда существует, если процесс описывается уравнениями

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + B(x(t))u(t),$$

где $u(t) \in U$ и U — выпуклое множество (Е. Ли, Л. Маркус [1]), либо уравнениями

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \varphi(u(t)),$$

где множество U не обязательно выпуклое (Л. Нейштадт [2]).

Заметим, что во всех перечисленных примерах, как видно из § 4, принцип максимума справедлив для соответствующих дискретных аналогов. Вообще, по-видимому, можно утверждать, что если оптимальное управление u^* существует в непрерывной задаче, то для

соответствующего дискретного аналога (2) принцип максимума справедлив по крайней мере для $0 \leq \Delta \leq \Delta_1$; $\Delta_1 > 0$.

§ 5, 6. Одноэкстремальные системы дискретного управления рассматривались А. И. Пропоём [2, 3]. Об аналогичных системах непрерывного управления (для которых принцип максимума Л. С. Понтрягина дает необходимые и достаточные условия оптимальности) см. работу Е. Ли [1].

Глава V

§ 1, 2. Двойственные задачи управления были сформулированы в работах Р. Калмана [1], где был установлен принцип двойственности между задачами управления и наблюдения. О двойственности между управлением и наблюдением см. также Н. Н. Красовский [2] и Дж. Пирсон [4].

Интересные соотношения двойственности в частотной области установлены Р. Ликом [1].

С формальной точки зрения двойственные задачи управления рассматривались в работах Дж. Пирсона [2,3], Е. Крайндлера, Б. Монда и М. Хансона [1], Р. М. Ван Слика и Р. Уэтса [1], А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова [1].

Идеи двойственности для получения условий оптимальности и вычислительных методов использовались в работах Дж. Пирсона [3], В. М. Ефимова [2], Р. Уилсона [1].

§ 3. Связь условий оптимальности с существованием седловой точки функции Лагранжа в задачах дискретного управления рассматривалась А. А. Первозванским [1].

§ 5. Достаточные условия в такой форме были установлены А. Г. Бутковским [1]. О других типах достаточных условий оптимальности см. О. Мангасарьян [2] и В. Ф. Кротов [1].

§ 6. Отметим, что функция $G^*(p(k+1), p(k))$ ($k=0, 1, \dots, N$), определенные из (6.1)—(6.3), являются сопряженными, соответственно, к функции Гамильтона $H_k(p(k+1), x(k), u(k))$ и показателю качества $\Phi(x(N))$.

Сопряженные функции существенно используются в теории двойственности экстремальных задач. См., например, С. Карлин [1], Р. Рокафеллар [3].

§ 8, 9. Условия оптимальности для дискретных систем управления при наличии ограничений на переменные состояния рассматривались М. Кэноном, Ч. Каллэмом и Е. Полаком [1, 2], О. Мангасарьяном и С. Фромовитцем [1], А. А. Первозванским [1] и Б. Н. Пшеничным [4].

§ 10. Условия оптимальности для дискретных систем, аналогичные теореме Куна — Таккера (в дифференциальной форме), рассматривались А. И. Пропоём [1], А. А. Первозванским [1] и Д. Б. Пирсоном, Р. Сридхаром [1].

§ 11. Теория двойственности для задач линейного динамического программирования была развита в работе Ю. П. Иванилова, А. И. Пропоёя [1].

Из § 11 ясно виден принцип декомпозиции: решение пары двойственных задач N -шагового линейного программирования (11.1) —

(11.5), (11.10) — (11.14) сводится к решению пары двойственных задач (11.28), (11.29) одношагового программирования, связанных между собой прямыми (11.1), (11.2) и двойственными (11.10), (11.11) уравнениями движения.

При этом любые необходимые и достаточные условия оптимальности и связанные с ним методы решения для «локальных» задач линейного программирования (11.28), (11.29) (см., например, Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн [1]) переносятся на динамические задачи (11.1) — (11.5), (11.10) — (11.14).

Эти условия, как видно из § 11, следующие:

1) значения функций Гамильтона прямой и двойственной задачи совпадают (теорема 11.5);

2) управления прямой и двойственной задач связаны условиями дополняющей нежесткости (теорема 11.2);

3) функция Гамильтона одной из задач принимает экстремальное значение по соответствующему управляющему воздействию, другое управляющее воздействие является оптимальной двойственной переменной (разрешающим множителем) для этой экстремальной задачи (теоремы 11.3, 11.4);

4) пары управлений образуют седловую точку «локальной» функции Лагранжа

$$F_k(p(k+1), x(k), u(k), \lambda(k)) =$$

$$= H_P(p(k+1), u(k)) + H_D(x(k), \lambda(k)) + (\lambda(k), D(k)u(k)).$$

§ 12. Задачи управления с линейными уравнениями движения и квадратичным показателем качества явились удобной и простой моделью при рассмотрении процессов управления во многих прикладных задачах. Такие задачи (в основном, без ограничений на переменные) рассматривались, помимо упомянутых в комментариях к § 1, работах, в монографиях М. Кэнона, Ч. Каллэма, Е. Полака [2], Ч. Мерриэма [1], Ю. Ту [1] и др.

Глава VI

Численные методы дискретного управления используют как методы математического программирования, так и методы оптимального управления непрерывными процессами. Ссылки на литературу по методам математического программирования см. в комментариях к главе II. О численных методах в непрерывном управлении см., например, Н. Н. Моисеев [3], В. Ф. Демьянов и А. М. Рубинов [3], Н. Е. Кирин [1], Р. Габасов, Ф. М. Кириллова [1], Ю. М. Ермольев, В. П. Гуленко [1, 2], И. А. Крылов, Ф. Л. Черноусько [1, 2], И. О. Мельд [1—3], Н. Н. Моисеев [1, 3], Г. М. Островский [1], Г. М. Островский, Ю. М. Волин [1], Дж. Розен [1], Р. Уилсон [1], Л. И. Шатровский [1].

§ 1. О различных оценках оптимального показателя качества в задачах непрерывного и дискретного управления см. Р. Беллман [1], М. Хансон [2], А. Рингли [1], В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов [1, 3], А. И. Пропой [4].

§ 2. Метод возможных направлений для задач дискретного управления рассматривался А. И. Пропоем [4]. О прямых методах

в непрерывном управлении см. Л. И. Шатровский [1], Г. М. Островский [1], И. А. Крылов и Ф. Л. Черноусько [1].

О способах нормализации направления см. Г. Зойтендейк [1].

Различные методы предотвращения заикливания рассмотрены Г. Зойтендейком [1] и С. И. Зуховицким, Л. И. Авдеевой [1].

Прием линеаризации условий широко распространен в численных методах оптимального управления, см. Н. Н. Моисеев [4].

§ 8. О методах штрафных функций для одношаговых задач см., например, Ю. Б. Гермейер [1], И. И. Еремин [1], С. М. Мовшович [1]; в задачах управления — Н. Н. Моисеев [4], Д. Рассел [1], К. Окамура [1].

§ 9. Двойственные методы в задачах управления рассматривались Б. Н. Пшеничным [1, 2], В. М. Ефимовым [1], Ю. М. Ермольевым и В. П. Гуленко [1, 2], Р. Уилсоном [1].

§ 11. О различных методах решения двухточечной краевой задачи см. Н. Н. Моисеев [3], Г. М. Островский и Ю. М. Волин [1].

§ 13. Рассмотренный метод для оптимизации непрерывных систем был предложен И. А. Крыловым и Ф. Л. Черноусько [1].

§ 15. Непрерывные процессы управления с запаздыванием рассматривались Г. Л. Харатишвили [1, 2]. О дискретных системах с запаздыванием см. Фам Хыу Шак [2].

Из рассмотрения уравнений движения (15.1) видно, что задачи оптимального управления дискретными системами с запаздыванием по-прежнему сводятся к оптимизации функций многих переменных, задаваемых в неявном виде, и что они не приводят к тем сложностям, с которыми приходится сталкиваться в непрерывном случае.

ЛИТЕРАТУРА

Аллен (Allen R. G. D.)

1. Математическая экономия, ИЛ, 1963.

Агрис (Agris R.)

1. Оптимальное проектирование химических реакторов, ИЛ, 1963.

Атанс, Фальб (Athans M., Falb P. L.)

1. Теория оптимального управления, Машгиз, 1968.

Барьер (R. Pallu de la Barriere)

1. Duality in dynamic optimization, J. SIAM Control 4, 1, 1966.

Бергстром (Bergstrom A. R.)

1. Построение и применение экономических моделей, «Прогресс», 1970.

Беленький В. З.

1. О моделях оптимального планирования, основанных на схеме межотраслевого баланса, Экономика и матем. методы, 3, вып. 4, 1967.

Беллман (Bellman R.)

1. Quasi-linearization and upper and lower bounds for variational problems, Quart. Appl. Math. 19, 1962, 349—350.

2. Динамическое программирование, ИЛ, 1960.

3. Процессы регулирования с адаптацией, «Наука», 1964.

Беллман, Дрейфус (Bellman R., Dreyfus S. E.)

1. Прикладные задачи динамического программирования, «Наука», 1964.

Беллман, Гликсберг, Гросс (Bellman R., Glicksberg I., Gross O. A.)

1. Некоторые вопросы математической теории процессов управления, ИЛ, 1962.

Бережинский Т. А., Волин Ю. М., Островский Г. М.

1. Условия оптимальности для сложных процессов, Автоматика и телемеханика, № 3, 1968.

Березовский А. И., Иванов В. В.

1. Деякі алгоритми оптимальних керувань по швидкості, Доповіді АН УРСР, № 5, 1963.

Берковиц (Berkovitz L. D.)

1. Variational methods in problems of control and programming, J. Math. Anal. Appl. 3, 1961, 145—169.

2. Necessary conditions for optimal strategies in a class of differential games and control, J. SIAM Control 5, 1, 1967.

Берковиц, Дрейфус (Berkovitz L. D., Dreyfus S. E.)

1. The equivalence of some necessary conditions for optimal control in problems with bounded state variables, J. Math. Anal. Appl. 10, 2, 1965.

- Болтянский В. Г.
1. Математические методы оптимального управления, «Наука», 1966.
- Бутковский А. Г.
1. Необходимые и достаточные условия оптимальности для дискретных автоматических систем, Автоматика и телемеханика, № 8, 1963.
2. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, «Наука», 1965.
- Бутц (Butz A. R.)
1. Iterative saddle-point techniques, J. SIAM Appl. Math. 15, 3, 1967.
- Ван Слик, Уэтс (Van Slyke R. M., Wets R. J.-B.)
1. A duality theory for abstract mathematical programs with applications to optimal control theory, J. Math. Anal. Appl. 22, 3, 1968.
- Вейнотт (Veinott A. F.)
1. Minimum concave-cost solution of Leontief substitution models of multi-facility inventory systems, Operations Research 17, 2, 1969.
- Волин Ю. М., Островский Г. М.
1. Оптимизация процессов произвольной структуры, Автоматика и телемеханика, № 12, 1966.
- Волконский В. А.
1. Оптимальное планирование в условиях большой размерности, Экономика и матем. методы, № 2, 1965.
2. Схема оптимальности перспективного планирования и оценки ресурсов. Сб. «Применение математики в экономических исследованиях» 3, «Мысль», 1965.
3. Модель оптимального планирования и взаимосвязи экономических показателей, «Наука», 1967.
- Вулф (Wolfe Ph.)
1. Duality for nonlinear programming, Quarterly Appl. Math. 19, 3, 1961.
2. Новые методы нелинейного программирования, Сб. «Применение математики в экономич. исследованиях» 3, «Мысль», 1965.
- Габасов Р.
1. К вопросу об единственности оптимального управления в дискретных системах. Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, № 5, 1962.
2. К теории оптимальных дискретных процессов, ЖВМ и МФ 8, № 4, 1968.
- Габасов Р., Кириллова Ф. М.
1. К вопросу о распространении принципа максимума Л. С. Понтрягина на дискретные системы, Автоматика и телемеханика, № 11, 1966.
- Гаврилец Ю. Н., Михалевский Б. Н., Лейбкин Ю. Р.
1. Линейная модель оптимального роста плановой экономики, Сб. «Применение математики в экономических исследованиях» 3, «Мысль», 1965.

Гамкрелидзе Р. В.

1. О скользящих оптимальных режимах, ДАН СССР 143, 6, 1962.

Ганкель Франклин (Gunkel Th. L., Franklin G. E.)

1. A general solution for linear sampled-data control, J. Basic Eng. 85, ser. D. 2, 1963.

Гейл (Gale D.)

1. Теория линейных экономических моделей, ИЛ, 1963.

Гельфанд И. М., Фомин С. В.

1. Вариационное исчисление, Физматгиз, 1961.

Гермейер Ю. Б.

1. Приближенное сведение с помощью штрафных функций задачи определения максимина к задаче определения максимума, ЖВМ и МФ 9, № 3, 1969.

Гноевский Л. С., Мовшович С. М.

1. О применении методов линейного программирования к одной задаче теории следящих систем, Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, № 6, 1962.
2. О применении методов математического программирования к задаче оптимального регулирования, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 1964.

Голдман, Таккер (Goldman A. J., Tucker A. W.)

1. Теория линейного программирования, Сб. «Линейные неравенства и смежные вопросы», ИЛ, 1959.

Гольштейн Е. Г.

1. Двойственные задачи выпуклого программирования. «Экономика и матем. методы», № 3, 1965.
2. Методы блочного программирования, Экономика и матем. методы, № 1, 1966.
3. Двойственные задачи выпуклого и дробно-выпуклого программирования в функциональных пространствах, Сб. «Исследования по математическому программированию», «Наука», 1968.

Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.

1. Методы расчета и синтеза импульсных автоматических систем, Автоматика и телемеханика 24, № 7, № 12, 1963.
2. Новые направления в линейном программировании, «Сов. радио», 1966.

Данциг (Dantzig G. B.)

1. Optimal solution of a dynamic Leontjev model with substitution, Econometrica 23, 3, 1955.
2. On the status of multistage linear programs, Management. Sci. 6, 1, 1959.
3. Linear control process and mathematical programming, J. SIAM Control 4, 1, 1966.
4. Линейное программирование, его обобщения и применения, «Прогресс», 1966.

Данциг, Айнзенберг, Коттл (Dantzig G. B., Eisenberg E., Cottle R. W.)

1. Symmetric dual nonlinear programs, Pacific J. Math. 15, 809—812, 1965.

Даффин (Duffin R.)

1. Dual programs and minimal costs, J. SIAM 1, 1962.

Дезоэр, Уинг (Desoer C. A., Wing J.)

1. The minimal time regulator problem for linear sampled-data systems: general theory, J. Franklin Inst. **272**, 3, 1961.
2. An optimal strategy for a saturating sampled-data systems, IRE Trans. **AC-6**, 1961.
3. A minimal time discrete system, IRE Trans. **AC-6**, 2, 1961.

Демьянов В. Ф.

1. К минимизации функций на ограниченных множествах, Кибернетика, № 6, 1966.
2. К разысканию седловых точек, Вестник ЛГУ, сер. матем. и мех. **4**, 19, 1967.
3. К решению некоторых минимаксных задач, Кибернетика, № 6, 1966, № 3, 1967.

Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.

1. Минимизация гладкого выпуклого функционала на выпуклом множестве, Вестник ЛГУ, сер. мат. и мех., № 19, 1964.
2. О необходимых условиях минимума, Экономика и матем. методы, № 3, 1966.
3. Приближенные методы решения экстремальных задач, Изд-во ЛГУ, 1968.

Деннис Дж. Б. (Dennis G. B.)

1. Математическое программирование и электрические цепи, ИЛ, 1961.

Дорн (Dorn W. M.)

1. Duality in quadratic programming, Quaterly Appl. Math. **18**, 2, 1962.

Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.

1. Задачи на экстремум при наличии ограничений, Ж. вычисл. матем. и матем. физики **5**, 3, 1965.

Еремин И. И.

1. О некоторых итерационных методах в выпуклом программировании, Экономика и матем. методы, № 6, 1966.

Ермольев Ю. М.

1. Методы решения нелинейных экстремальных задач, Кибернетика, № 4, 1966.

Ермольев Ю. М., Гуленко В. П.

1. О численных методах решения задач оптимального управления, Кибернетика, № 1, 1966.
2. Конечноразностный метод в задачах оптимального управления, Кибернетика, № 3, 1967.

Ефимов В. М.

1. Динамическая модель планирования, Сб. «Моделирование экономических процессов» **2**, Изд-во МГУ, 1968.
2. Исследование стохастических экстремальных задач с помощью функционального анализа, Кибернетика, № 2, 1969.

Заде, Уален (Zadeh L. A., Whalen B.)

1. On Optimal Control and Linear Programming, IRE Trans. **AC-7**, 4, 1962.

Зойтендейк (Zoutendijk G.)

1. Методы возможных направлений, ИЛ, 1963.
2. Nonlinear programming: a numerical survey, J. SIAM Control **4**, 1, 1966.

Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.

1. Линейное и выпуклое программирование, «Наука», 1964.

Иванов Ю. П.

1. Некоторые вопросы управления производством при наличии внешнего давления, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 2, 1970.
2. Сопряженные (двойственные) линейные динамические задачи оптимизации и методика их решения, Прикладная математика и программирование 4, Изд-во АН Молдавской ССР, 1970.

Иванов Ю. П., Петров А. А.

1. Динамическая модель расширения и перестройки производства (π -модель), Сб. «Кибернетику на службу коммунизму» под ред. А. И. Берга. 6, «Энергия», 1971.
2. О некоторых способах решения задач оптимального планирования для динамических моделей производства. В том же сб.
3. Расчет оптимального плана развития производства по динамической π -модели. В том же сб.
4. Динамическая многоотраслевая модель производства, Кибернетика, № 2, 1970.

Иванов Ю. П., Пропой А. И.

1. О задачах динамического линейного программирования, ДАН СССР 198, 8, 1971.
2. Задачи динамического выпуклого программирования, ЖВМ и МФ 12, 3, 1972.

Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.

1. Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи, УМН 23, вып. 6 (144), 1968.

Иоффе И. И., Письмен Л. М.

1. Инженерная химия гетерогенного катализа, «Химия», 1965.

Иордан, Поляк (Jordan B. K., Polak E.)

1. Theory of a class of discrete optimal control system, J. Electr. and Control 17, 6, 1964.

Калман (Kalman R. E.)

1. Об общей теории управления, Труды Первого международного конгресса по автоматическому управлению 2, Изд. АН СССР, 1961.

Канторович Л. В.

1. Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем, ДАН СССР 28, 3, 1940.
2. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, Изд. АН СССР, 1960.

Канторович Л. В., Макаров В. Л.

1. Оптимальные модели перспективного планирования, Сб. «Применение математики в экономических исследованиях» 3, «Мысль», 1965.

Карамардиан (Kararmardian S.)

1. Strictly quasi-convex (concave) functions and duality in mathematical programming, J. Math. Anal. Appl. 20, 2, 1967.

Карлин (Karlin S.)

1. Математические методы в теории игр, программировании и экономике, «Мир», 1964.

Кац (Katz S.)

1. A discrete version of Pontryagin's maximum principle, J. Electronics and Control **13**, 2, 1962.
2. A general minimum principle for end-point control problems, J. Electronics and Control **16**, 2, 1964.

Келли (Kelley G. J.)

1. Метод градиентов, Сб. «Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета», «Наука», 1965.

Ким (Kim M.)

1. On the minimum time control of linear sampled data systems, Proc. IEEE **53**, 9, 1965.

Кирин Н. Е.

1. Вычислительные методы теории оптимального управления, Изд. ЛГУ, 1968.

Кортанек, Эванс (Kortanek K. O., Evans J. P.)

1. Pseudo-concave programming and Lagrange regularity, Operat. Research **15**, 1967.

Коттл (Cottle R. W.)

1. Symmetric dual in quadratic programming, Quaterly Appl. Math. **21**, 3, 1963.
2. Nonlinear programming with positively bounded Jacobians, J. SIAM Appl. Math. **14**, 1, 1966.

Кофман, Крюйон (Kaufmann A., Cruon R.)

1. La programmation dynamique, Dunod, P., 1965.

Крайндлер (Kreindler E.)

1. Reciprocal optimal control problems, J. Math. Anal. Appl. **14**, 1, 1966.

Красовский Н. Н.

1. Об одной задаче оптимального регулирования, ПММ **21**, 5, 1957.
2. Теория управления движением, «Наука», 1968.

Крылов И. А., Черноусько Ф. Л.

1. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления, ЖВМ и МФ **2**, № 6, 1962.
2. Решение задач оптимального управления методом локальных вариаций, ЖВМ и МФ **6**, № 2, 1966.

Кун, Таккер (Kuhn H. W., Tucker A. W.)

1. Nonlinear programming, Proc. Second Berkeley symp. on math. statistics and prob., Calif., Berkeley, 1952.

Курант (Courant R.)

1. Курс дифференциального и интегрального исчисления **2**, ГТТИ, 1931.

Кротов В. Ф.

1. Достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых систем, ДАН СССР **172**, 1, 1967.

Кэнон, Каллэм, Полак (Cannon M., Cullum C., Polak E.)

1. Constrained minimization problems in finite dimensional spaces, J. SIAM Control **4**, 3, 1966.
2. Theory of optimal control and mathematical programming McGraw-Hill, 1970.

Кюнзи, Крелле (Kunzi H. P., Krelle W.)

1. Нелинейное программирование, «Сов. радио», 1965.

Ларсон (Larson R. E.)

1. Dynamic programming with reduced computational requirements, IEEE Trans. AC-10, 1, 1965.

Левин А. Ю.

1. Об одном алгоритме минимизации выпуклых функций, ДАН СССР 160, 6, 1965.

Левитин Е. С., Поляк Б. Т.

1. Методы минимизации при наличии ограничений, ЖВМ и МФ 6, 5, 1966.

Лейтман (Leitmann G.)

1. Sufficiency theorems for optimal control, J. opt. theory and appl. 2, 5, 1968.
2. Введение в теорию оптимального управления, «Наука», 1968.

Ли (Lee E. B.)

1. A sufficient condition in the theory of optimal control, J. SIAM Control 1, 3, 1963.

Ли, Маркус (Lee E. B., Markus L.)

1. Foundations of optimal control theory, NY, Wiley, 1967.

Лик (Leake R. T.)

1. Duality condition established in the frequency domain, IEEE Trans. on Information Theory IT-11, 3, 1965.

Макаров В. Л.

1. Линейные динамические модели производства, Сб. «Оптимальное планирование», вып. 5, «Наука», 1966.

Мангасарьян (Mangasarian O. L.)

1. Duality in nonlinear programming, Quaterly Appl. Math. 20, 1962, 300—302.
2. Pseudo-convex functions, J. SIAM Control 3, 2, 1965.
3. Sufficient conditions for the optimal control of nonlinear systems, J. SIAM Control 4, 1, 1966.

Мангасарьян, Понштейн (Mangasarian O. L. Ponsstein J.)

1. Minmax and duality in nonlinear programming, J. Math. Anal. Appl. 11, 1—3, 1965, 504—518.

Мангасарьян, Фромовитц (Mangasarian O. L., Fromovitz S.)

1. A maximum principle in mathematical programming, in «Mathematical theory of control», Ed. A. V. Balakrishnan, L. W. Neustadt, Academic Press, NY, 1967.

Мельц И. О.

1. Применение методов нелинейного программирования для оптимизация динамических систем в функциональном пространстве. Автоматика и телемеханика, № 1, 1968.
2. Учет ограничений в задаче оптимизации динамических систем в функциональном пространстве на основе методов нелинейного программирования, Автоматика и телемеханика, № 3, 1968.
3. Определение функций влияния для расчета улучшающих вариаций управляющих функций и параметров динамических систем с разрывными правыми частями, Автоматика и телемеханика, № 5, 1968.

Мендиратта (Mendiratta S. L.)

1. General symmetric dual programs, *Operations Research* 14, 1, 1966.

Мерриэм (Merrigan C. W.)

1. Теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью, «Мир», М., 1967.

Мовшович С. М.

1. Об одном итерационном методе решения задач линейного и выпуклого программирования, *Экономика и матем. методы*, № 4, 1967.

Моисеев Н. Н.

1. Метод динамического программирования в теории оптимального управления, *ЖВМ и МФ* 4, № 3, 1964; 5, № 1, 1965.
2. О применении методов теории оптимальных управлений к задаче оптимального планирования, *Кибернетика*, № 2, 1966.
3. Численные методы оптимального управления, Изд. ВЦ АН СССР, 1968.
4. Численные методы в теории оптимальных систем, «Наука», 1971.

Монд (Mond B.)

1. A symmetric dual theorem for nonlinear programs, *Quarterly Appl. Math.* 23, 1965, 265—269.

Монд, Коттл (Mond B., Cottle R. W.)

1. Self-duality in mathematical programming, *J. SIAM Appl. Math.* 14, 3, 1966.

Монд, Хансон (Mond B., Hanson M.)

1. Duality for control problems, *J. SIAM Control* 6, 1, 1968.

Моро (Moréau J. J.)

1. Quadratic programming in mechanics; dynamics of one sided constraints, *J. SIAM Control* 4, 1, 1966.

Мороз А. И.

1. Синтез оптимального по быстродействию управления для дискретных линейных систем, *Автоматика и телемеханика*, №№ 2, 3, 6, 1965.

Надеждин П. В.

1. О свойствах оптимальных и линейных импульсных систем, *Изв. АН СССР, Техн. кибернетика*, № 4, 1964.

Нейштадт (Neustadt L. W.)

1. The existence of optimal control in the absence of convexity conditions, *J. Math. Anal. Appl.* 7, 1, 1963.
2. An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems, *J. SIAM Control* 4, 3, 1966.

Окамура (Okamura K.)

1. Some mathematical theory of the penalty method for solving optimum control problems, *J. SIAM Control* 2, 1964, 317—331.

Островский Г. М.

1. Об одном методе расчета оптимальных систем, *Автоматика и телемеханика*, № 3, 1965.
2. Об оптимизации комплексных химико-технологических схем, *Изв. АН СССР, Техническая кибернетика*, № 5, 1964.

Островский Г. М., Волин Ю. М.

1. Методы оптимизации химических реакторов, «Химия», 1967.

Первозванский А. А.

1. О связи основных теорем математического программирования и принципа максимума, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 1967.

Первозванская Т. Н., Первозванский А. А.

1. Децентрализация оптимального планирования в сложной системе, Автоматика и телемеханика, № 7, 1968.

Пирсон, Сридхар (Pearson J. B., Sridhar R.)

1. A discrete optimal control problem, IEEE Trans. AC-11, 2, 1966.

Пирсон (Pearson J. D.)

1. The discrete maximum principle, Int. J. Control 2, 2, 1965.
2. Reciprocity and duality in control programming problems, J. Math. Anal. Appl. 10, 2, 1965.
3. Duality and a decomposition technique, J. SIAM Control 4, 1, 1966.
4. On the duality between estimation and control, J. SIAM Control 4, 4, 1966.

Поляк Б. Т.

1. Методы и минимизации функции многих переменных, Экономика и матем. методы, № 6, 1967.
2. Об одном общем методе решения экстремальных задач, ДАН СССР, 174, 1, 1967.
3. Градиентные методы минимизации функционалов, ЖВМ и МФ 3, 4, 1963.

Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.

1. Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.

Порцелли, Фигли (Porcelli G., Fegley K.)

1. Optimum design of digitally compensated systems by quadratic programming, J. Franklin Inst. 282, 5, 1966.

Пропой А. И.

1. Применение методов линейного программирования для синтеза импульсных автоматических систем, Автоматика и телемеханика, № 7, 1963.
2. Об одной задаче оптимального дискретного управления, ДАН СССР 159, 6, 1964.
3. О принципе максимума для дискретных систем управления, Автоматика и телемеханика, № 7, 1965.
4. Методы возможных направлений в задачах дискретного управления, Автоматика и телемеханика, № 2, 1967.
5. Задачи дискретного управления с фазовыми ограничениями, ЖВМ и МФ 12, № 4, 1972.

Пшеничный Б. Н.

1. Принцип двойственности в задачах выпуклого программирования, ЖВМ и МФ 5, № 1, 1965.
2. Двойственный метод в экстремальных задачах, Кибернетика, № 3, 4, 1965.
3. Выпуклое программирование в нормированном пространстве, Кибернетика, № 5, 1965.

4. Синтез линейных импульсных систем, Автоматика и телемеханика, № 5, 1966.
 5. Необходимые условия экстремума, «Наука», 1969.
- Процессы регулирования в моделях экономических систем, Сб. статей под ред. Я. З. Цыпкина и Б. Н. Михалевского, ИЛ, 1961.
- Рассел (Russel D. L.)
1. Penalty functions and bounded coordinate control, J. SIAM Control, 2, 1964, 409—422.
- Рингли (Ringlee A. V.)
1. Bounds for convex variational program problems arising in power system scheduling and control, Proc. 5 Joint Aut. Contr. Conf., 1964, p. 429—435.
- Робертс (Roberts S.)
1. Динамическое программирование в процессах химической технологии, «Мир», 1965.
- Розен (Rosen J. B.)
1. Iterative solution of nonlinear optimal control process, J., SIAM Control 4, 1, 1966.
- Розоноэр Л. И.
1. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, Автоматика и телемеханика, №№ 10—12, 1959.
 2. О достаточности условий оптимальности, ДАН СССР 127, 3, 1959.
- Рокафеллар (Rockafellar R. T.)
1. Duality theorems for convex functions, Bull. Amer. Math. Soc. 70, 1964, 189.
 2. Duality and stability in extremum problems involving convex functions, Pacific J. Math. 2, 1, 1967.
 3. Convex analysis, Princeton Univer. Press., 1967.
- Роксин (Roxin E.)
1. The existence of optimal control, Michigan Math. J. 9, 3, 1962.
- Рубинштейн Г. Ш.
1. Двойственные экстремальные задачи, ДАН СССР 152, 2, 1963.
- Рыбашов М. В.
1. Градиентный метод решения задач выпуклого программирования на электронной модели, Автоматика и телемеханика, № 11, 1965.
- Саати (Saati T.)
1. Математические методы исследования операций, Воениздат, 1963.
- Таката (Takata M.)
1. Time-optimal of sampled-data control systems of linear process with saturating manipulated variables, J. Japan association aut. contr. eng. 9, 12, 1965.
- Торнг (Torng H. C.)
1. Optimization of discrete control systems through linear programming, J. Franklin Inst. 227, July, 1964.
- Ту (Тоu J.)
1. Современная теория управления, «Машиностроение», 1971.
- Уилсон (Wilson R.)
1. Computation of optimal control, J. Math. Anal. Appl. 14, 1, 1966.

Фан, Вань (Fan L. T., Wang C. S.)

1. On the optimization of multistages feedback process, J. SIAM 12, 1, 1964.
2. Multi-stage optimization by the generalised discrete maximum principle, J. Electronics and Control 16, 4, 1964.
3. Optimization of systems reliability, IEEE Trans. Reliability 16, 4, 1967.
4. Дискретный принцип максимума, «Мир», 1967.

Фам Хыу Шах

1. Об оптимальном управлении дискретными процессами, Автоматика и телемеханика, № 8, 1968.
2. Об оптимальном управлении дискретными системами с запаздыванием, Автоматика и телемеханика, № 7, 1970.

Фельдбаум А. А.

1. Основы теории оптимальных и автоматических систем, Физматгиз, 1963.

Фигли, Хзу (Fegley K., Hsu M. I.)

1. Optimum discrete control by linear programming, IEEE Trans. Automatic Control AC-10, 1, 1965.

Филиппов А. Ф.

1. О некоторых вопросах в теории оптимального управления, Вестник МГУ, сер. матем. и мех., № 2, 1959.

Франк, Вулф (Frank M., Wolfe R.)

1. An algorithm for quadratic programming, Naval Res. Logist. Quart. 3, 1, 1956.

Халкин (Halkin H.)

1. A maximum principle of the Pontryagin type for systems described by nonlinear difference equations, J. SIAM Control 4, 1, 1966.

Халкин, Нейштадт (Halkin H., Neustadt L. W.)

1. General Necessary Conditions for Optimization Problems, Proc. Nat. Acad. Sciences 56, 1966.

Хансон (Hanson M. A.)

1. Duality and self-duality in mathematical programming, J. SIAM Appl. Math. 12, 5, 1964.
2. Bounds for functionally convex optimal control programs, J. Math. Anal. Appl. 8, 1, 1964.

Харатишвили Г. Л.

1. Принцип максимума в теории оптимальных процессов с запаздыванием, ДАН СССР, 136, 1, 1961.
2. Оптимальные процессы с запаздыванием. Тбилиси, «Мецниереба», 1966.

Хедли (Hadley G.)

1. Нелнейное и динамическое программирование, «Мир», 1967.

Ховард (Howard R.)

1. Динамическое программирование и марковские цепи, «Сов. радио», 1964.

Хольцман (Holtzman J. M.)

1. Convexity and the maximum principle for discrete systems, IEEE Trans. Automatic Control AC-11, 1, 1966.

2. On the maximum principle for nonlinear discrete systems, IEEE Trans. Automatic Control AC-11, 2, 1966.
- Хольцман, Халкин (Holtzman J. M., Halkin H.)
1. Directional convexity and the maximum principle for discrete systems, J. SIAM Control 4, 2, 1966.
- Хорн, Джексон (Horn F., Jackson R.)
1. On discrete analogues of Pontryagin's maximum principle, Int. J. Control 1, 4, 1965.
- Хуанг, Фан (Hwang C. L., Fan L. T.)
1. The application of the maximum principle to industrial and management systems, J. Ind. Eng. 17, 1966, 589—593.
 2. Optimal production planning by the maximum principle, Management Science 13, 9, 1967.
 3. A discrete version of Pontryagin's maximum principle, Operation Research 15, 1, 1967.
- Хэнсмен (Hanssman F.)
1. Применение математических методов в управлении производством и запасами, «Прогресс», 1966.
- Цыпкин Я. З.
1. Об оптимальных процессах в импульсных автоматических системах ДАН СССР 134, 2, 1966.
 2. Оптимальные процессы в импульсных автоматических системах, Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, № 4, 1960.
 3. Адаптация и обучение в автоматических системах, «Наука», 1968.
- Чанг (Chang S. S. L.)
1. Digitized maximum principle, Proc. IRE 48, December, 1960.
 2. Optimization of nonlinear control systems by means of digitized maximum principle. IRE Int. Convention Record, part 4, 1961.
 3. Синтез оптимальных систем автоматического управления, «Машиностроение», 1964.
- Чарнс, Кортанек (Charnes A., Kortanek K. A.)
1. A note on the discrete maximum principle and distribution problem, J. Math. and Phys. 45, 1, 1966.
- Шатилов Н. Ф.
1. Опыт разработки динамических моделей воспроизводства, Сб. «Проблемы народно-хозяйственного оптимума» под ред. А. Г. Аганбегяна и др., «Наука», 1966.
- Шатровский Л. И.
1. Об одном численном методе решения задачи оптимального управления, ЖВМ и МФ 2, № 3, 1962.
- Шор Н. З.
1. О структуре алгоритмов численного решения задач оптимального планирования и проектирования, Автореферат диссертации, ИК АН УССР, 1964.
 2. Применение обобщенного градиентного спуска в блочном программировании, Кибернетика, № 3, 1967.
 3. О скорости сходимости обобщенного градиентного спуска, Кибернетика, № 3, 1968.
- Шор Н. З., Шепакин М. Б.
1. Алгоритм решения двухэтапной задачи стохастического программирования, Кибернетика, № 3, 1968.

Штоер (Stoer J.)

1. Duality in nonlinear programming and the minimax theorem, Numerische Mathematik, 5 band, 4 heft, 1963.
2. Über einen Dualitätssatz der nichtlinearen Programmierung, Numerische Mathematik, 6 band, 1 heft, 1964.

Эрроу, Гурвиц, Удзава (Arrow K., Gurvitz L., Uzawa H.)

1. Исследования по линейному и нелинейному программированию, ИЛ, 1962.

Эрроу, Антховен (Arrow K., Enthoven A. C.).

1. Quasi-concave programming, Econometrica 29, 3, 1961.

Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г.

1. Линейное программирование, Физматгиз, 1963.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Вариация допустимая 40, 84
— — в широком смысле слова 41

— подходящая 44

Воздействие управляющее 17

Выпуклость множества 35

— — по направлению 35

— функции вверх 36

— — вниз 36

Гиперплоскость 37

— опорная 37

— разделяющая 37

Градиент 43

— обобщенный 70, 234

Двойственная задача 50, 57,
122, 135, 139, 201, 238

Двойственности понятие 48,
233

— соотношения 123, 125, 156,
157, 168

Двойственный метод 60, 68,
201, 233

Двойственных задач пара 53,
54, 55, 122, 239

Декомпозиции принцип 73, 234

Достаточность оптимальности
условия 134, 238

Задача выпуклого программи-
рования 39, 55

— двойственная 50, 51, 53, 119,
135, 139, 154, 238

— дискретного управления 19,
232

— квадратичного динамическо-
го программирования 160

Задача квадратичного програм-
мирования 39, 54

— линейного динамического
программирования 152, 159,
238

— — программирования 39,
54, 57

— непрерывного управления 19

— одношаговая 38

— оптимизации конечного со-
стояния без фазовых огра-
ничений 21, 79, 102, 171, 211

— — — с фазовыми огра-
ничениями 21, 92, 142, 148,
184, 209, 212

— перспективного планирова-
ния 11, 231

— расчета химических реакто-
ров 13, 232

— со свободным начальным
состоянием 23

— с суммарными ограничения-
ми 23

— с суммарным критерием 22

— — — без фазовых огра-
ничений 91, 104

— — — с фазовыми огра-
ничениями 132

— с фиксированным конечным
состоянием 22

— управления запасами 13, 231

Конус 37

— выпуклый 37

— допустимых вариаций 40,
78, 95, 234

— — — в широком смысле
слова 42, 95

— многогранный 37, 93

- Максимум функции глобальный** 37
— — локальный 37
Методы возможных направлений 63, 168, 234
— двойственные 60, 68, 201, 240
— прямые 49, 60
Множество выпуклое 35
— — по направлению 35
— достижимости 27, 31, 102
— замкнутое 35
— ограниченное 35
- Направление допустимое** 63, 172
— возможных методов 63, 168, 234
— — подходящее 64, 172, 185
Норма вектора 34
Нормализация направления 65, 173, 240
- Ограничения активные** 43
— в виде равенств 67, 193
— на переменные состояния 184, 209
Окрестность точки 34
Оценка приближения для задач управления 165, 178, 189
— — для одношаговой задачи 60, 66
- Переменные сопряженные** 77
— состояния 16
— управления 17
— фазовые 16
Принцип квазимаксимума 106, 236
— максимума 46, 235
— — без фазовых ограничений 102, 104
— — с фазовыми ограничениями 148, 155
— минимума 156, 163
Программирование 34, 232
— выпуклое 39, 55
— квадратичное 39, 54
— — динамическое 160
- Программирование линейное** 39, 54, 57
— — динамическое 152, 159, 238
— нелинейное 39, 232
Пространство состояний 16, 27
— — расширенное 25, 28
- Система линейная** 29, 115, 181, 190, 204, 232
— с запаздыванием 216, 240
— сопряженная 76
Состояние системы 16
Существование оптимального управления 31, 237
- Теорема Вейерштрасса** 31, 35
— Куна — Таккера 57
— — — для задач управления 149, 238
— о разделяющей гиперплоскости 37
— существования оптимального управления 31
Точка внутренняя 35, 78
— граничная 35
— седловая 56, 130, 239
Траектория 17
- Управление** 17
— допустимое 18, 171, 184
Уравнения движения 17
— в вариациях 82
— линейные 29, 115, 181, 190, 204
- Условия одноэкстремальности** 48, 112, 124, 133
— регулярности 41, 42, 43, 78
— — Слейтера 44
- Функция, выпуклая вверх** 36
—, — вниз 36
— Гамильтона 77, 99, 222
— Лагранжа 50, 120, 152
— сопряженная 238
- Шар** 34
Штраф 75, 159
Штрафных функций метод 198, 240

Анатолий Иванович Пропой
**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ
ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ**

(Серия: «Оптимизация и исследование операций»)

М., 1973 г., 256 стр. с илл.

Редакторы *А. П. Баева* и *М. М. Горячая*
Техн. редактор *Е. Н. Земская*
Корректор *А. Л. Ипатова*

Сдано в набор 22/VIII 1972 г. Подписано к печати
14/II 1973 г. Бумага 84×108¹/₃₂. Физ. печ. л. 8.
Условн. печ. л. 13,44. Уч.-изд. л. 13,57. Ти-
раж 13 000 экз. Т-00761. Цена книги 88 коп.
Заказ № 114.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117 071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

4-я типография изд-ва «Наука», г. Новосибирск, 77,
ул. Станиславского, 25.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
58	12 стр.	$\nabla \Phi^* = \frac{\partial \Phi(x^*)}{\partial x} =$	$\nabla \Phi^* = \frac{\partial \Phi(x^*)}{\partial x},$
	6 стр.	$\frac{\partial f_j(x^*)}{\partial x};$	$\frac{\partial f_j(x^*)}{\partial x},$
86	15 стр.	$M_{sk}(x(s))$	$M_{s,k}(x(s))$
126	8 стр.	$-B(N-1)u^2(N-1)=$	$-B(N-1)u^2(N-1)=$
146	9 стр.	$\delta_u H(pu^*(k+1), x^*(k),$ $u^*(k), k) \leq 0$	$\delta_u H(p^*(k+1), x^*(k),$ $u^*(k), k) \leq 0$
147	5 стр.	$= \left[\frac{\partial h_j}{\partial x_j(k)} \right]$	$= \left[\frac{\partial h_j}{\partial x_i(k)} \right]$
158	5 стр.	$= -(\lambda(k), C(k), x(k)) +$	$= -(\lambda(k), C(k) x(k)) +$
163	3 стр.	$= \frac{1}{2}(u(k), R(\kappa) u(\kappa)) +$ $+ (b(\kappa), u(\kappa)) +$	$= \frac{1}{2}(u(k), R(k) u(k)) +$ $+ (b(k), u(k)) +$
179	8 стр.	$(i=1, \dots,$	$(i=1, \dots$
199	2 стр.	$= 0, \text{ если } x \overline{\in} R,$	$= 0, \text{ если } x \in R,$
217	13 стр.	$x(k - n_v)$	$x(k - n_v)$
231	6 стр.	Робертс [1],	С. Робертс [1],
238	17 стр.,	Е. Крайндлера,	Е. Крайндлера [1],
	18 стр.	Б. Монда и М. Хансона [1],	Б. Монда и М. Хансона [1],

Цена 88 коп.

Цена 88 коп.